

シン・マイクロ波フィルタ入門
 —最新の合成理論と進化する設計技術—
 Introduction to “Syn” Microwave Filters
 —Latest Synthesis Theory and Evolving Design Techniques—

大平 昌敬

Masataka OHIRA

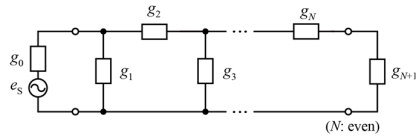
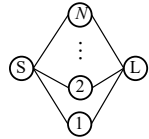
同志社大学理工学部

Faculty of Science and Engineering, Doshisha Univ.

概要

本基礎講座では、現代のマイクロ波フィルタの基礎となる結合行列の合成理論からフィルタ設計の最前線までを体系的に解説する。基礎を固めつつ、最新の設計技術を自分のものになりたい学生や技術者を広く対象とする。設計実務や研究開発で活かせるように、(1) 一般化チェビシェフ関数を伝達関数に持つ原型低域通過／高域通過フィルタ、(2) その結合行列の合成理論、(3) 結合トポロジーの変換手法、(4) 結合係数や外部 Q 値に基づくフィルタ設計までの一連の流れを、具体的な設計例を交えながら説明する。また、結合行列の抽出技術やサロゲートモデルがもたらす革新的な設計手法についても紹介する。

表 フィルタ回路合成理論の比較

	古典的フィルタ理論	最新のフィルタ理論
原型フィルタ	原型低域通過フィルタ	原型低域通過フィルタ 原型高域通過フィルタ
原型フィルタの回路構成	ラダー型回路 	共振器並列結合型回路 
伝達関数	チェビシェフ関数やバターワース関数	一般化チェビシェフ関数
回路合成時に表れる有理関数	入力インピーダンスの連分数展開 $z_{in}(s) = \frac{1}{sg_1 + \frac{1}{sg_2 + \dots}}$	アドミタンス行列の部分分数展開 $[Y] = \begin{bmatrix} 0 & jm_{SL} \\ jm_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s + jm_{ii}} \begin{bmatrix} m_{Si}^2 & m_{Si}m_{iL} \\ m_{Si}m_{iL} & m_{iL}^2 \end{bmatrix}$
回路合成で得られる回路素子値	g パラメータ $g_i (i=0, 1, 2, \dots, N, N+1)$	規格化結合行列 $[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & \dots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & \dots & m_{2N} & m_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & m_{1N} & m_{2N} & \dots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & \dots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$

Abstract

This basic course systematically explains the fundamentals of modern microwave filters from the synthesis theory of coupling matrices to the cutting edge of filter design. The course is intended for students and engineers who wish to learn the latest design techniques while strengthening their knowledge of the fundamentals. It covers a series of design steps: (1) lowpass/highpass prototype filters with generalized Chebyshev functions as transfer functions, (2) synthesis theory of their coupling matrices, (3) transformation technique of coupling topology, and (4) filter design based on coupling coefficients and external Q factors, through illustrative examples. The lecture will also introduce innovative design approaches with coupling matrix extraction techniques and surrogate models.

シン・マイクロ波フィルタ入門

– 最新の合成理論と進化する設計技術 –

Introduction to “Syn” Microwave Filters

– Latest Synthesis Theory and Evolving Design Techniques –

大平 昌敬

同志社大学 理工学部

Masataka Ohira

Faculty of Science and Engineering, Doshisha Univ.

2025年11月28日

MWE 2025 基礎講座FR3A

■ 導入編

- マイクロ波フィルタとその特徴

■ 入門編

- 結合係数と外部Q値によるバンドパスフィルタの設計

■ 基礎編(古典的フィルタ理論)

- はしご型回路を用いたフィルタ回路合成法

■ 応用編(最新のフィルタ理論)

- 結合行列を用いたフィルタ回路合成法, 有極バンドパスフィルタの設計

■ 発展編

- サロゲートモデルを用いたフィルタ設計

■ まとめ・参考文献

※タイトルに【補足】と記載したスライドは, より深く勉強したい方向け

■ 電気系の学部科目

● 電気回路理論 (交流回路)

- ・リアクタンス回路
- ・はしご型回路
- ・回路解析

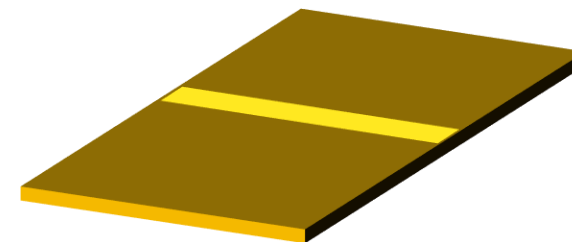
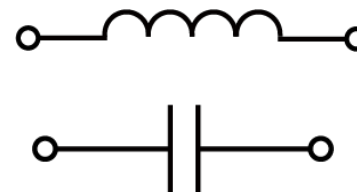
● 伝送線路理論

- ・伝送線路の基本行列 $[F]$
- ・位相定数 β , 特性インピーダンス Z_0

● マイクロ波工学

- ・マイクロストリップ線路など

■ 電磁界シミュレーション



導入編

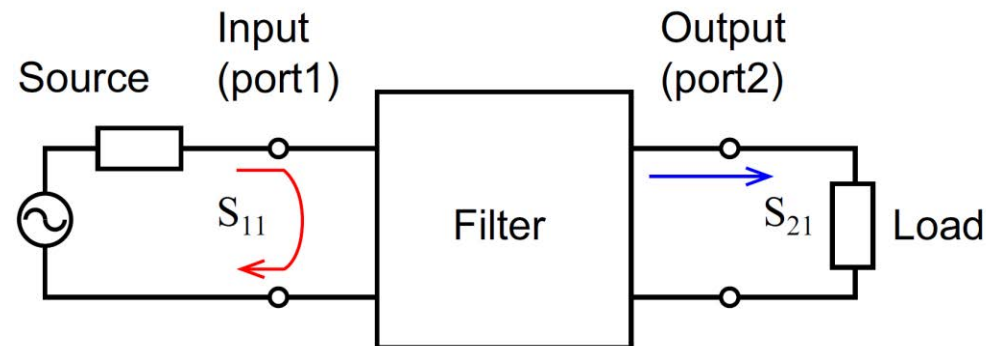
導入編：目次

- マイクロ波フィルタとは
- マイクロ波フィルタの目的
- マイクロ波フィルタの分類
- フィルタ特性を表すテクニカルターム
- マイクロ波フィルタの基本構成と物理構造例
- 共振器の無負荷Q値
 - 空洞共振器
 - 平面共振器
- マイクロ波フィルタの基本特性
 - 共振器段数
 - 無負荷Q値と周波数帯域幅

マイクロ波フィルタとは

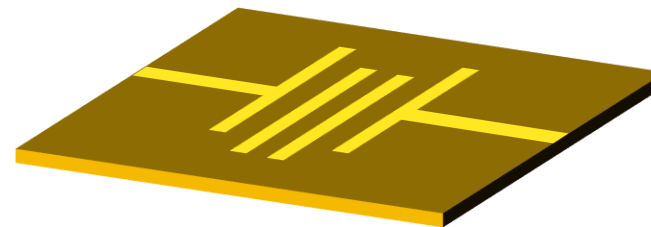
■ マイクロ波フィルタ

- マイクロ波帯で動作するフィルタ回路の総称
- 多くは分布定数線路や共振器を用いて構成



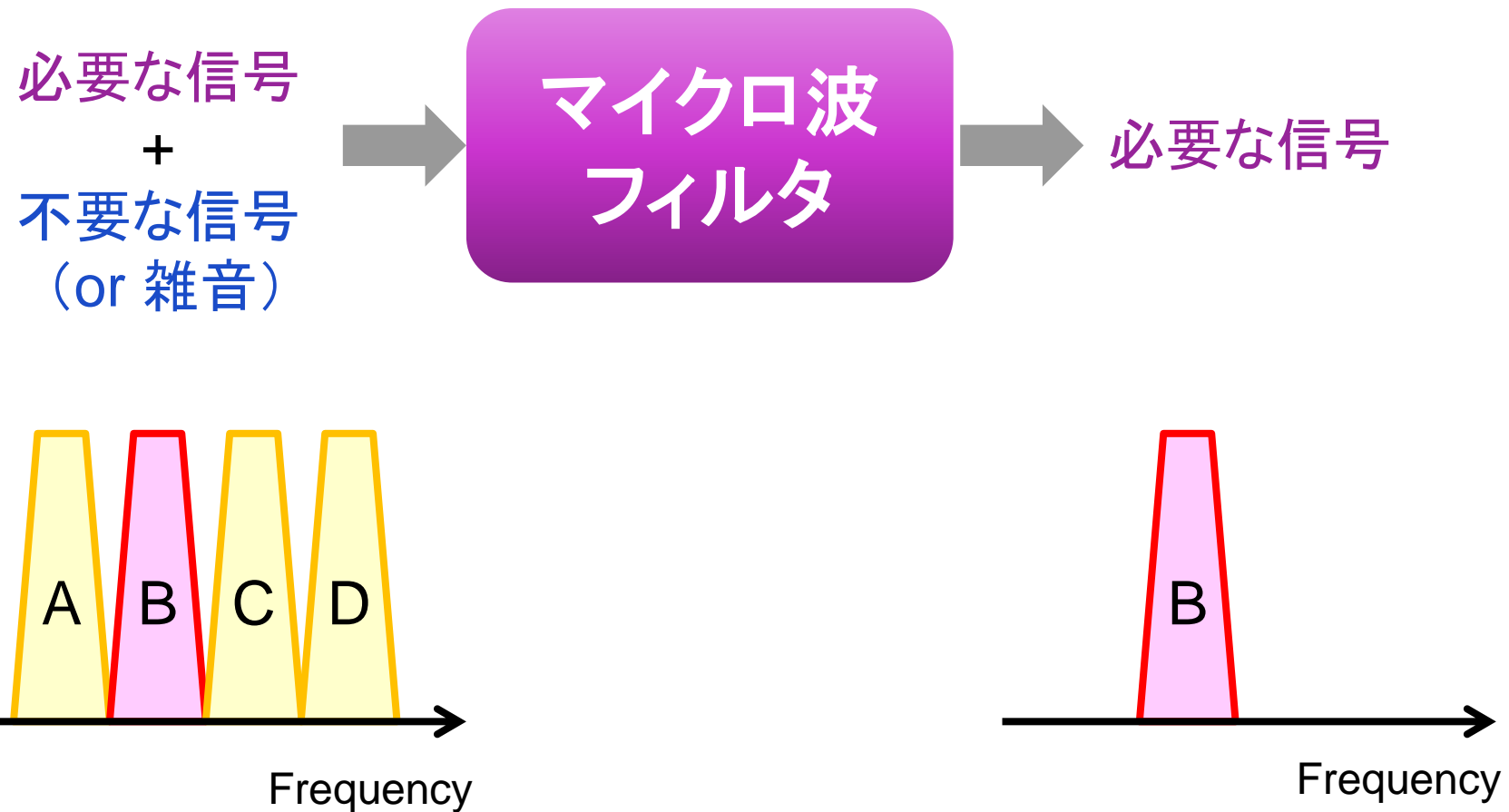
● 例

- マイクロストリップフィルタ
- 誘電体フィルタ
- 同軸共振器フィルタ



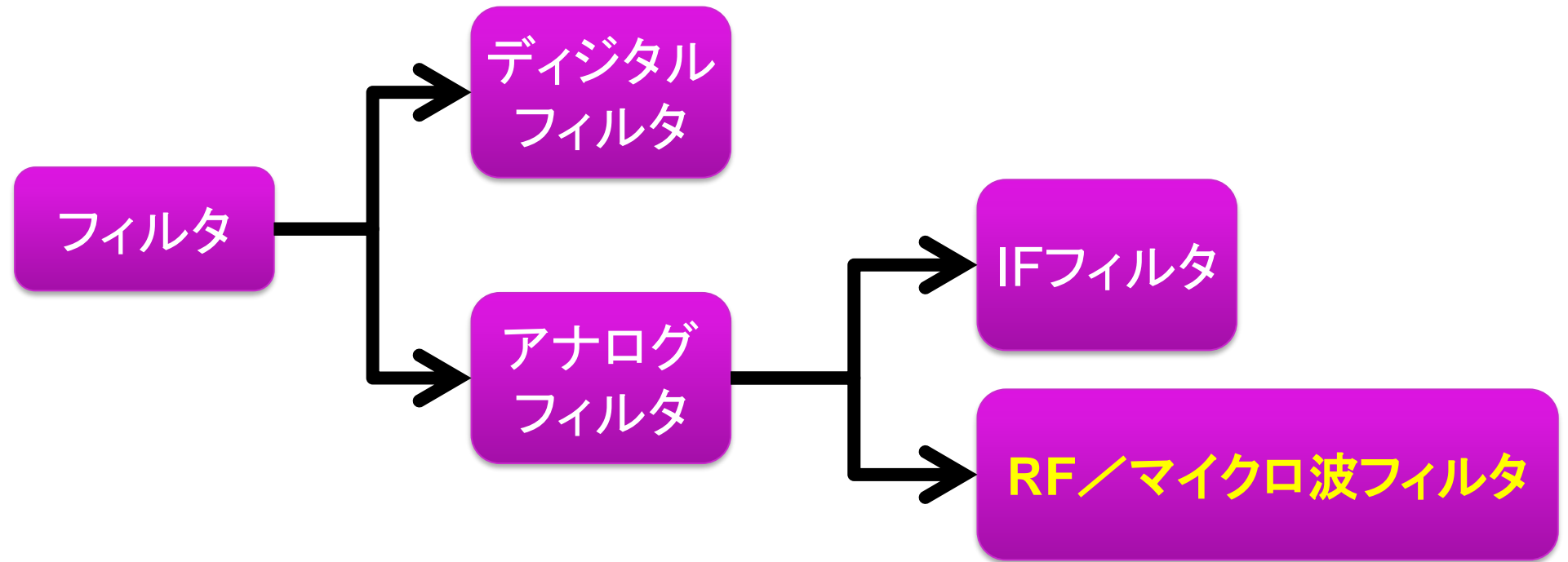
マイクロ波フィルタの目的

- 必要な信号周波数を取り出すこと



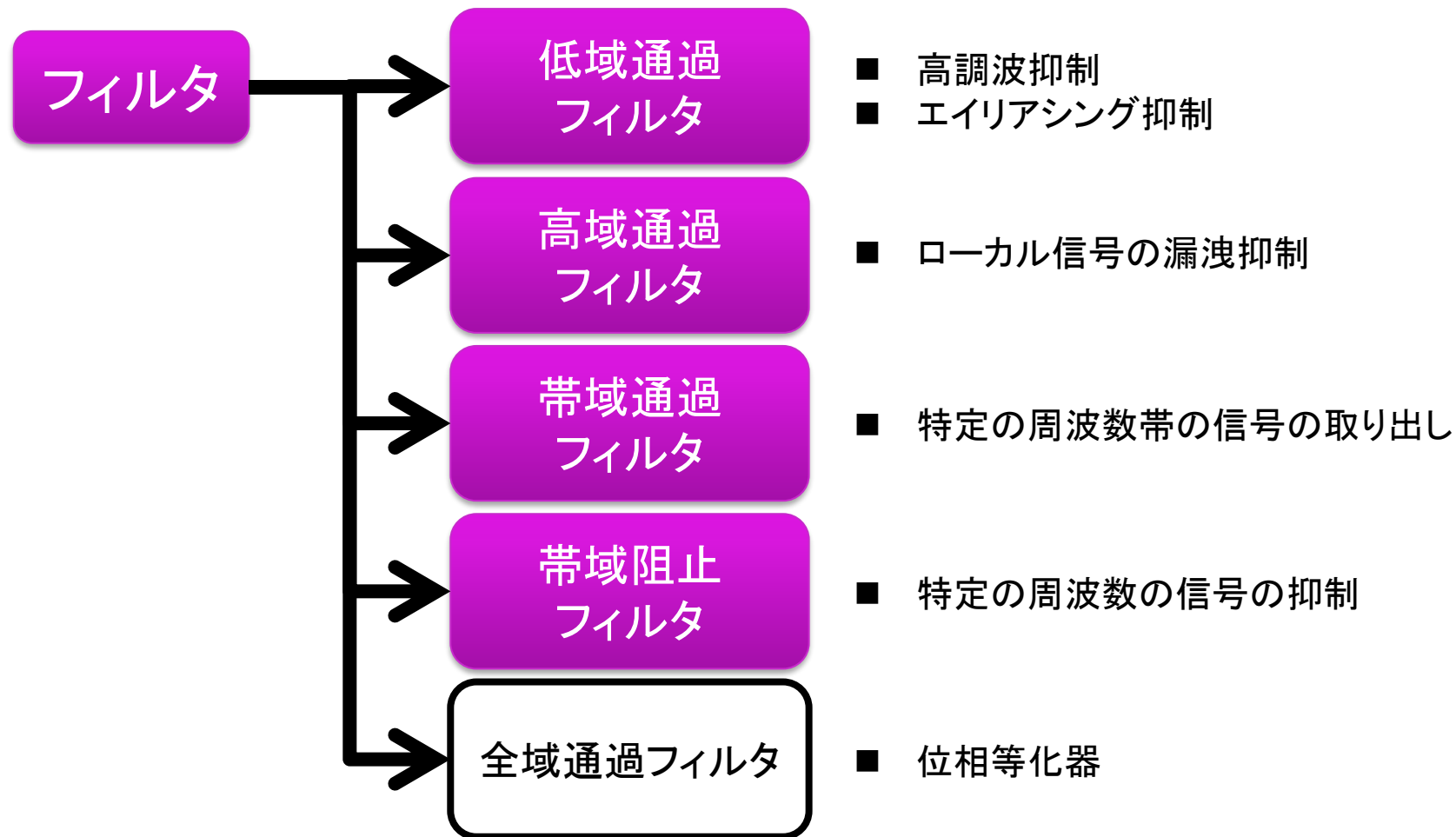
アナログ・デジタルによるフィルタの分類

■ アナログ・デジタルによる分類

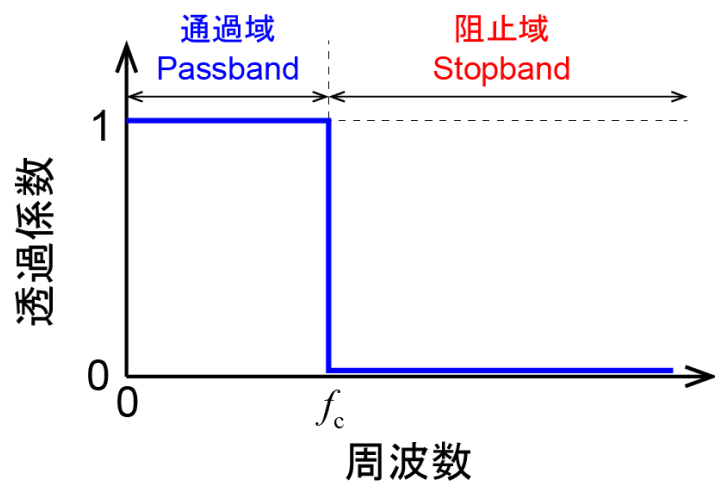


周波数特性によるフィルタの分類 (1/2)

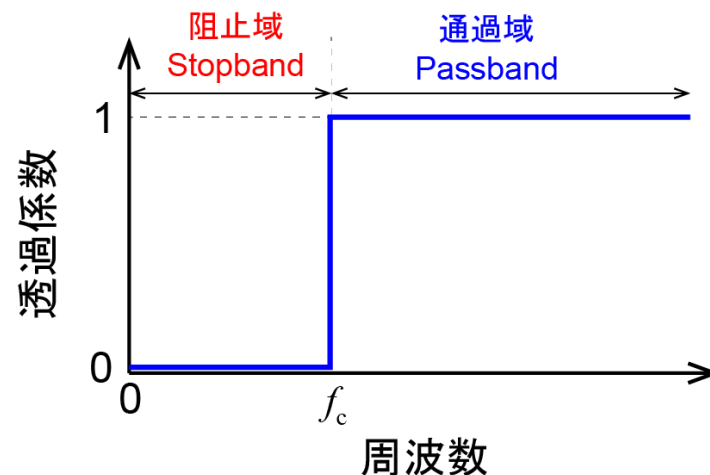
■ 周波数特性による分類



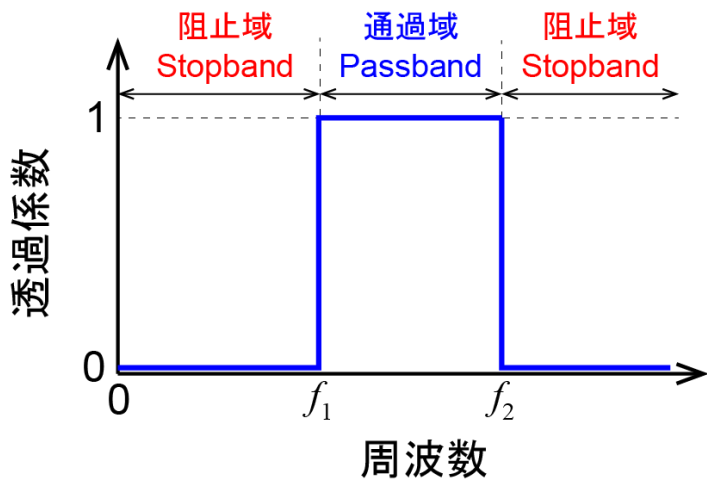
周波数特性によるフィルタの分類 (2/2)



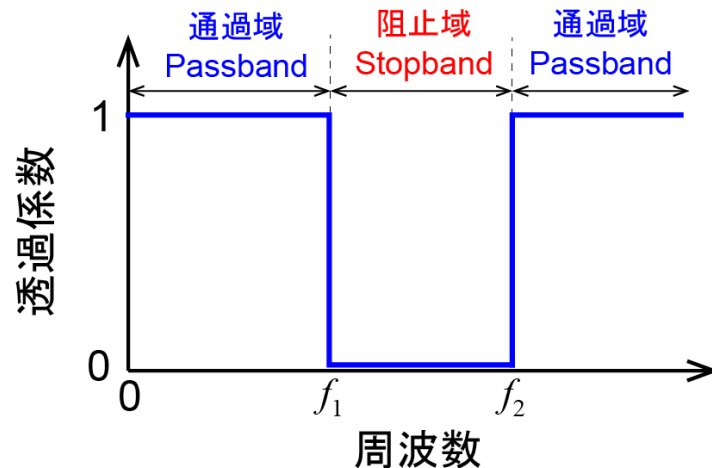
① 低域通過フィルタ (LPF: Lowpass filter)



② 高域通過フィルタ (HPF: Highpass filter)



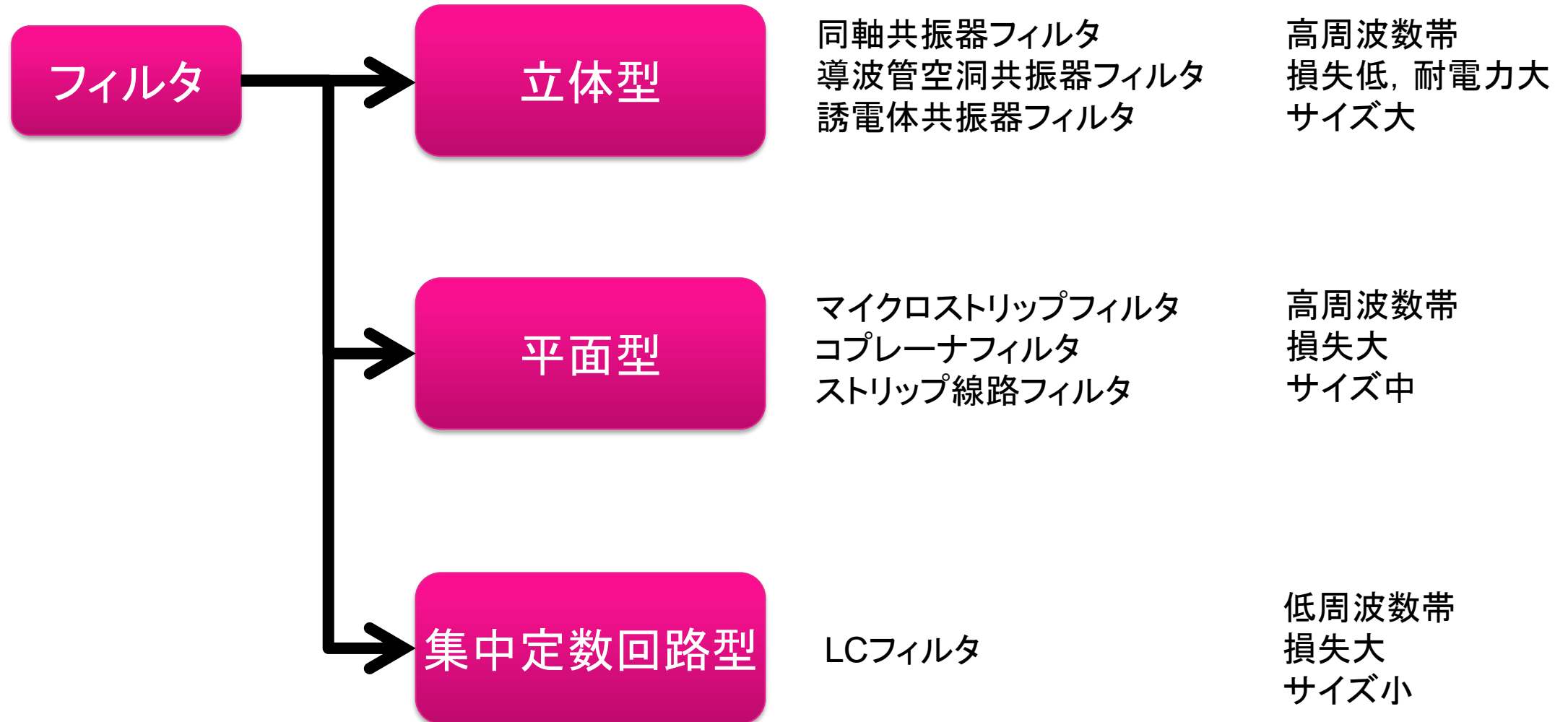
③ 帯域通過フィルタ (BPF: Bandpass filter)



④ 帯域阻止フィルタ (BSF: Bandstop filter)

共振器によるフィルタの分類

■ 共振器による分類



BPFの周波数帯域幅による分類

■ BPFの周波数帯域幅による分類

● 狭帯域フィルタ (narrowband filter)

- 比帯域が10～20%程度以下のフィルタ
- 狭帯域と広帯域の境界の明確な定義はない。

● 広帯域フィルタ (wideband filter)

- 比帯域が数十%～100%以上のフィルタ
- 設計理論上, 狭帯域近似が適用できない帯域幅を有するフィルタを広帯域フィルタと考えるもよい。

■ 狭帯域近似 (narrowband approximation)

- 中心角周波数 ω_0 付近でのみ成立することを前提とする近似

$$\omega \approx \omega_0$$

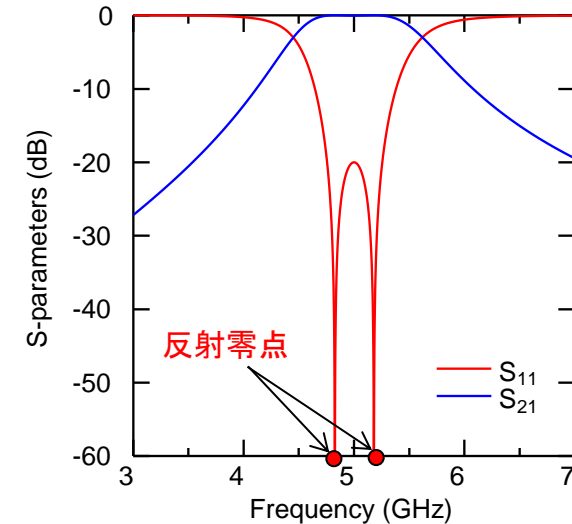
フィルタ特性を表すテクニカルターム

■ 極, 零点

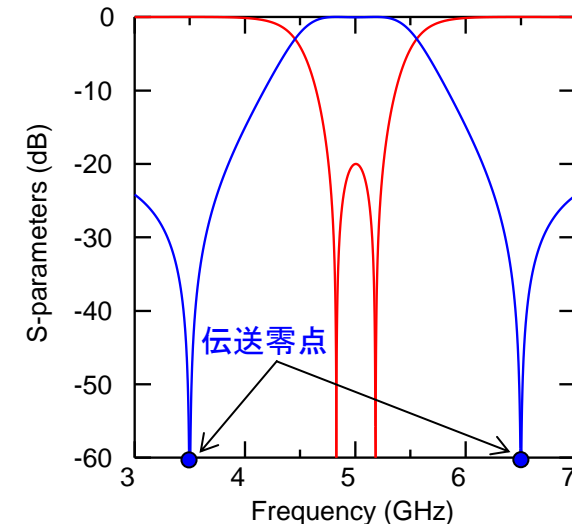
- 反射零点 (RZ: reflection zero)
 - ・ 反射電力がゼロとなる周波数点
 - ・ 減衰零 (attenuation zero) ともいう。
- 伝送零点 (TZ: transmission zero)
 - ・ 透過電力がゼロとなる周波数点
 - ・ 減衰極 (attenuation pole) ともいう。

■ 伝送零点の有無による分類

- 無極フィルタ
 - ・ 阻止域で伝送零点を持たないフィルタ
 - ・ (無限周波数においてのみ極を持つフィルタ)
- 有極フィルタ
 - ・ 通過域近傍の阻止域で伝送零点を持つフィルタ
 - ・ (有限周波数でも極を持つフィルタ)



無極フィルタ



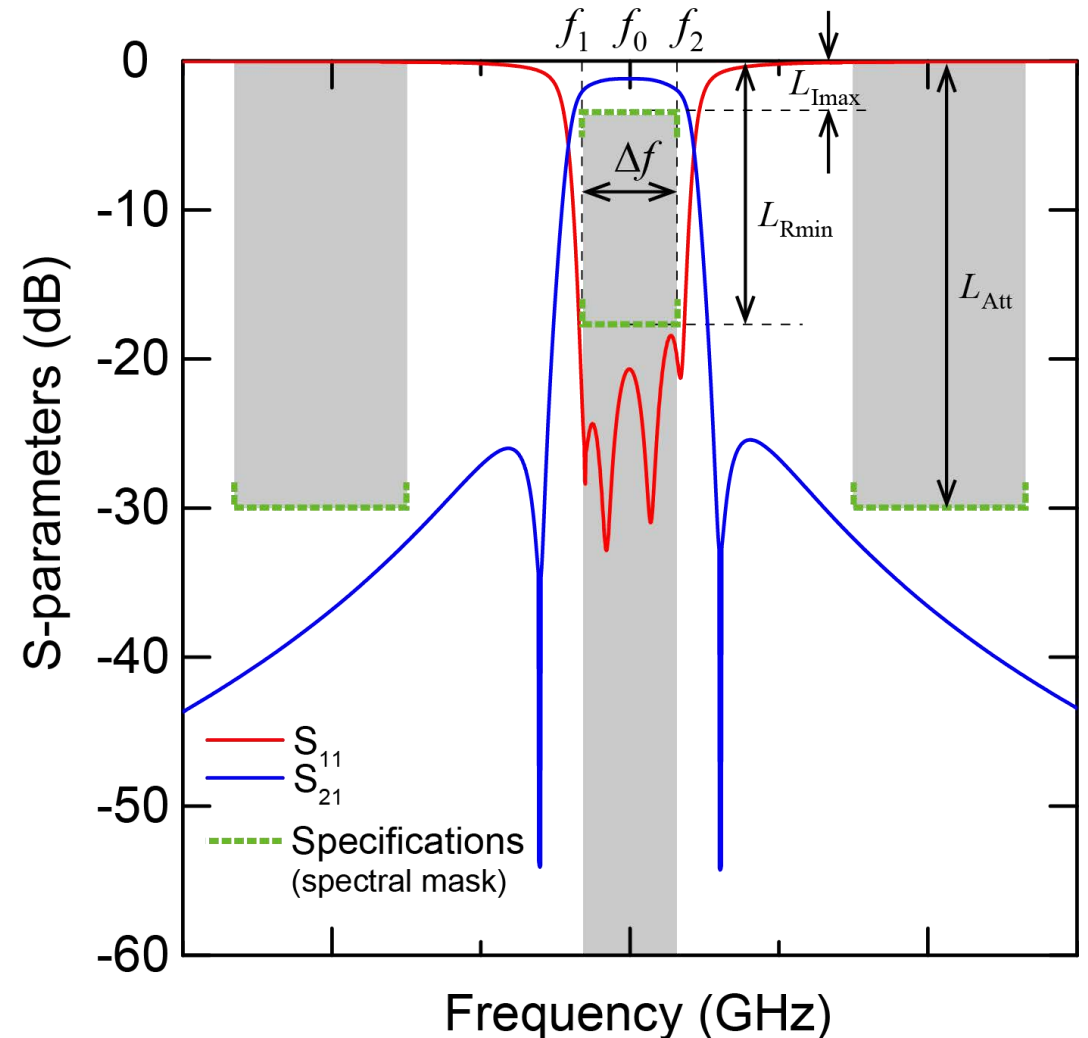
有極フィルタ

通過域の設計仕様 (BPF)

■ 通過域の設計仕様

- 中心周波数 f_0
 - 帯域端の周波数を f_1, f_2 とすると,

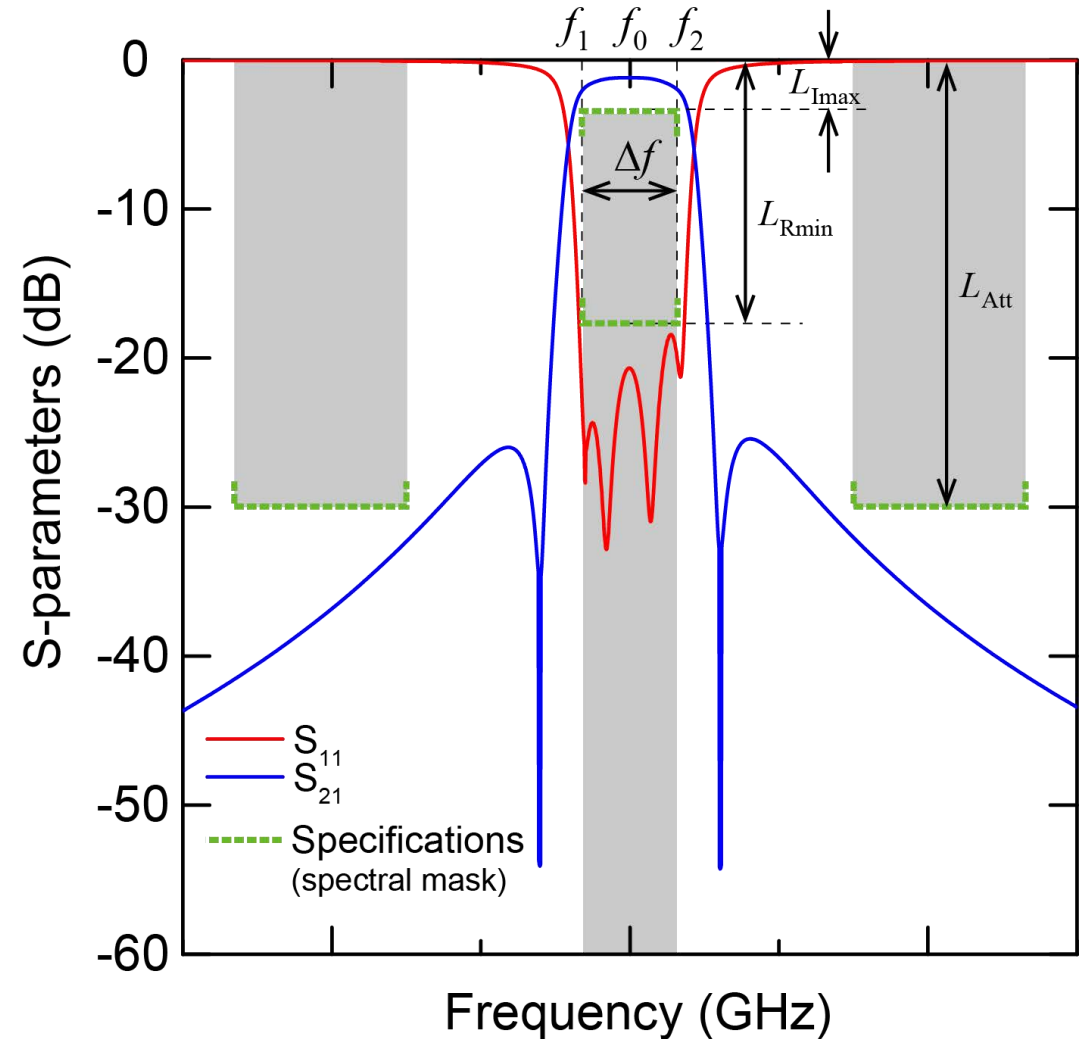
$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$
(簡易的には $f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2}$)
- 周波数帯域幅 $\Delta f (=f_2 - f_1)$
 - 絶対帯域幅ともいう。
 - 比帯域幅 $FBW = \Delta f / f_0$
- 挿入損失 $L_{I\max}$
 - 通常, 損失量の最大値で規定
- 反射損失 $L_{R\min}$
 - 通常, 損失量の最小値で規定
- それ以外 (群遅延特性など)



阻止域の設計仕様 (BPF)

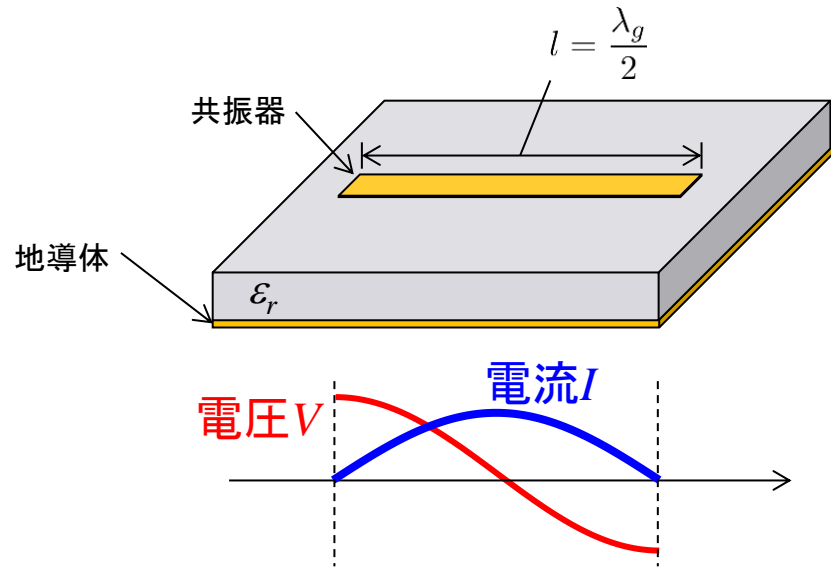
■ 阻止域の設計仕様

- 減衰量
 - 阻止域における絶対減衰量 L_{Att}
- 阻止域の帯域幅
 - 特に高域側の阻止域幅

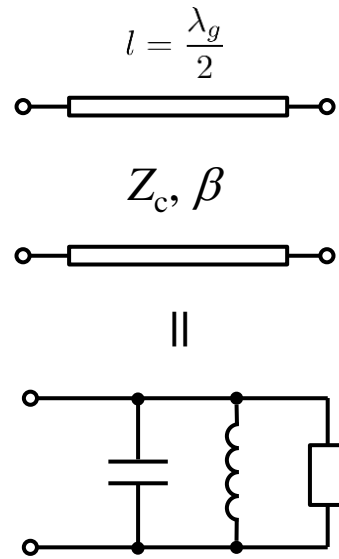


■ 共振器 (resonator)

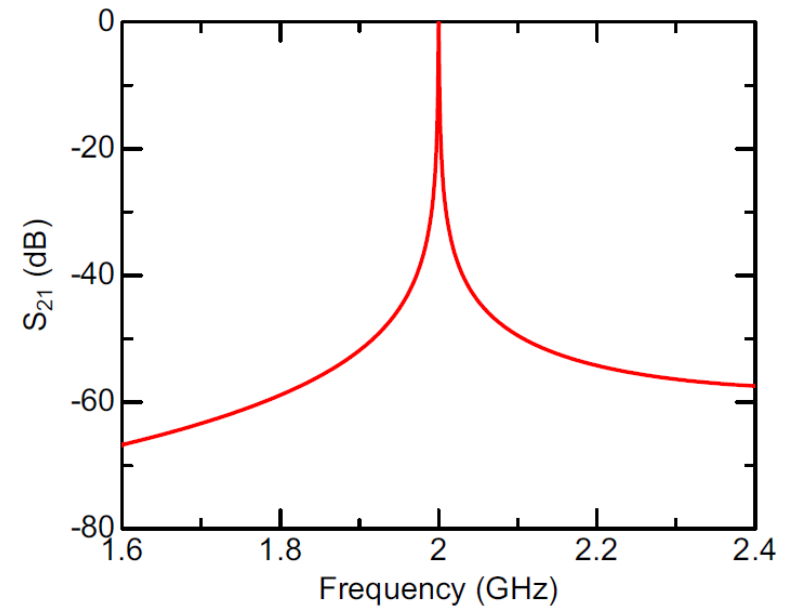
- 特定の周波数(波長)に対して共振現象を示す高周波回路素子
- LCR共振回路でモデル化できる.



マイクロストリップ半波長共振器



回路モデル

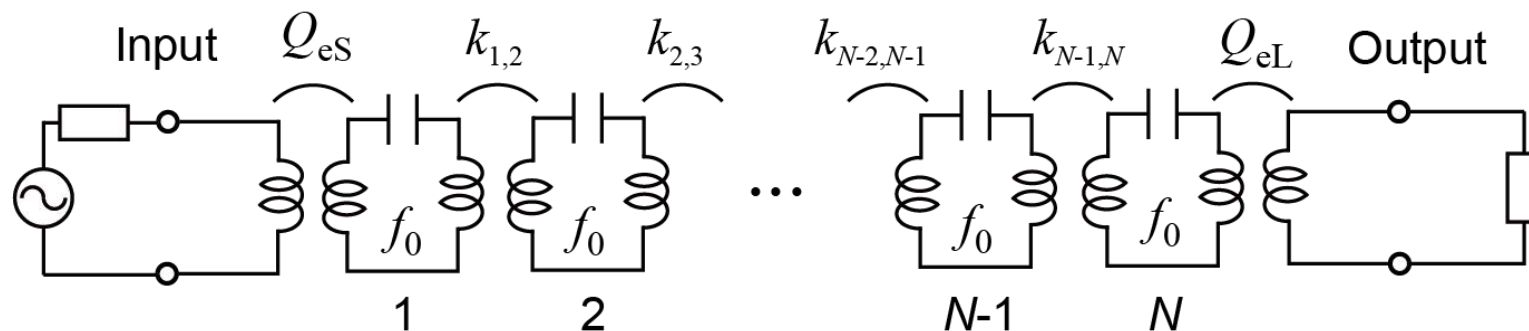


共振特性

マイクロ波フィルタ (BPF) の基本構成



設計仕様
中心周波数 f_0 , 帯域幅 Δf など

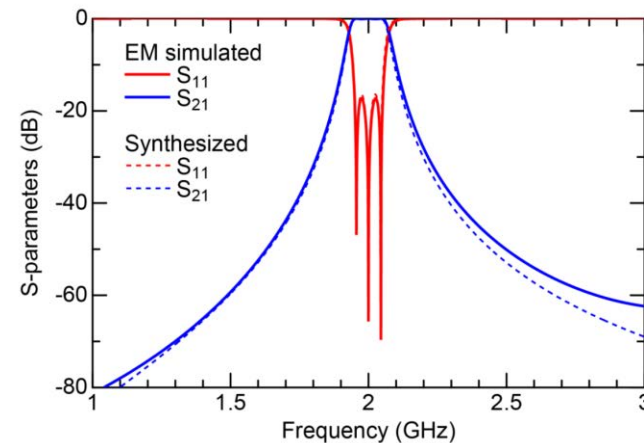
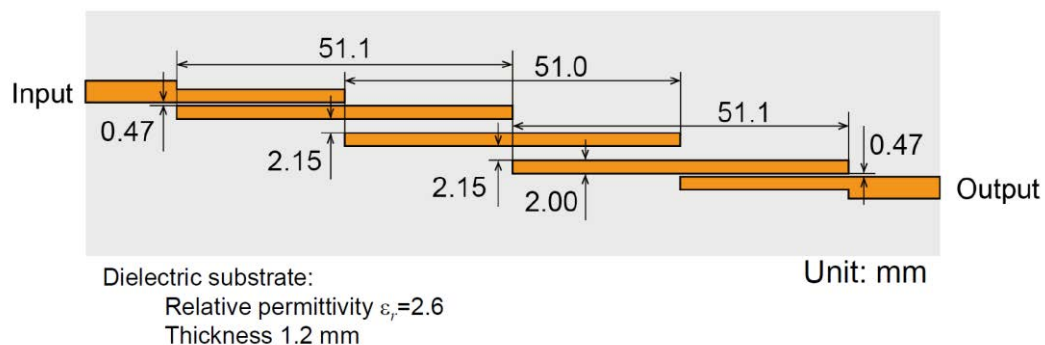


設計値
中心周波数 f_0 , 結合係数 k_{ij} , 外部Q値 Q_e など

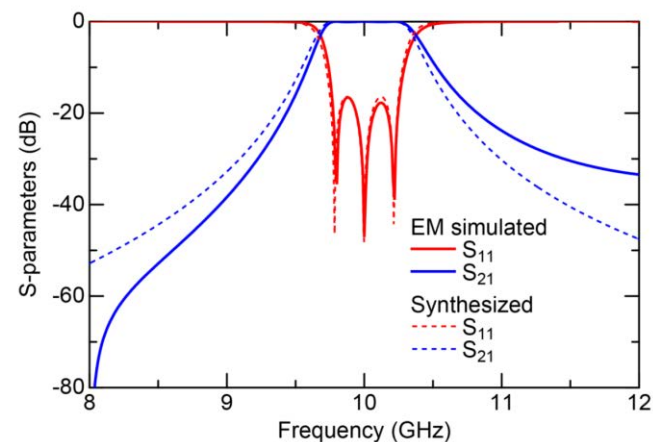
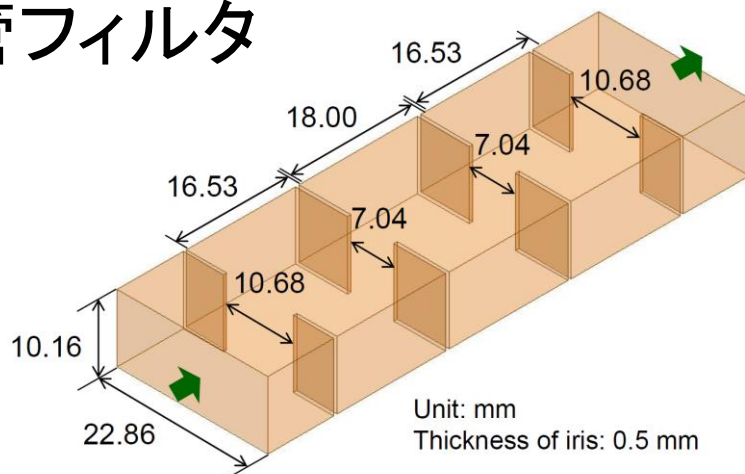
マイクロ波フィルタ (BPF) の物理構造例

■ 例

● マイクロストリップフィルタ



● 導波管フィルタ



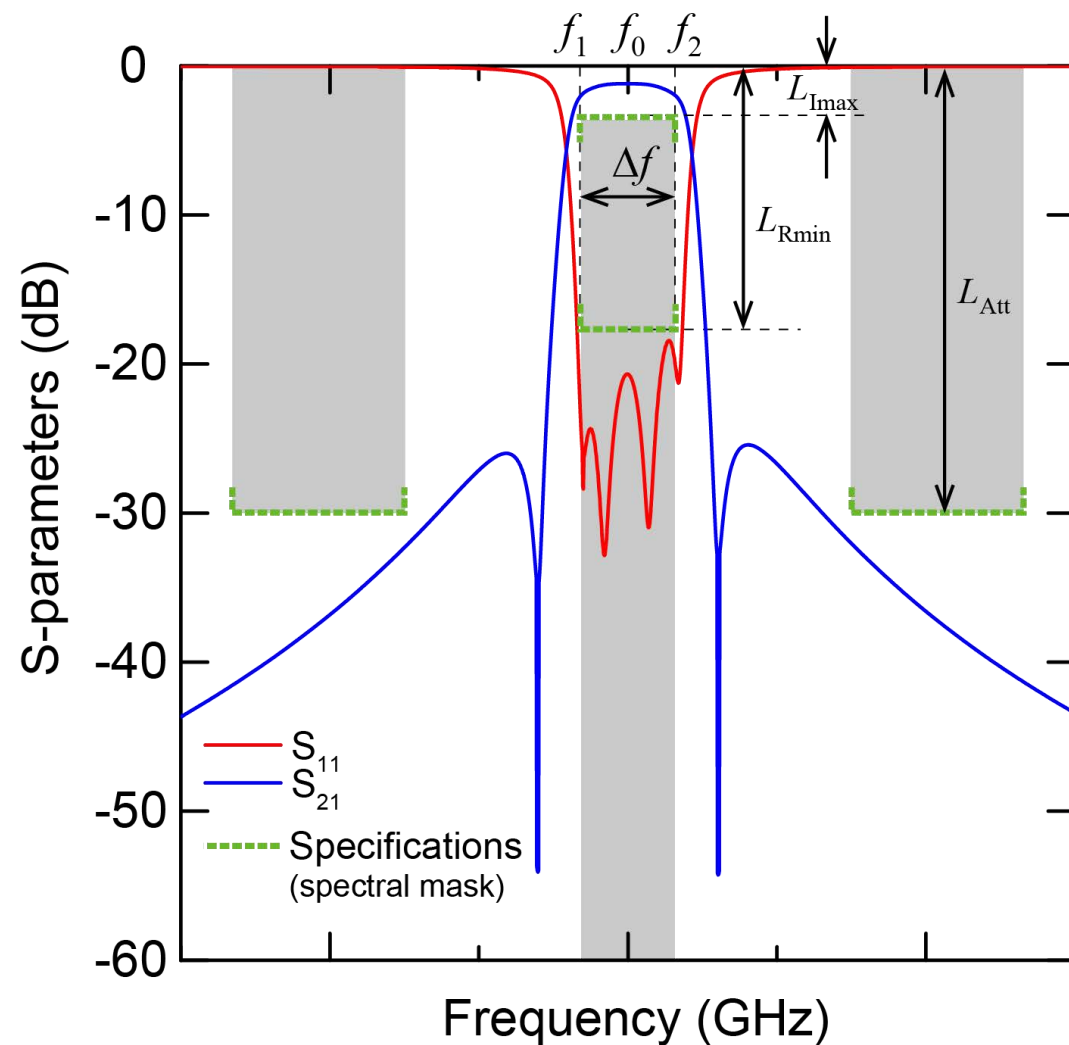
■ バンドパスフィルタの場合

● 通過域

- 挿入損失: 小
- 反射損失: 大

● 阻止域

- 減衰量: 大



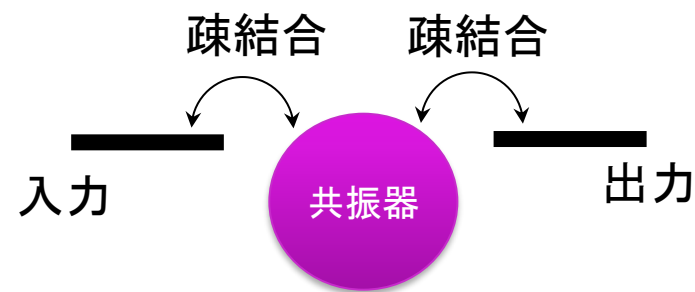
■ 無負荷Q値 Q_u (unloaded Q factor)

● 共振器の性能を表す指標

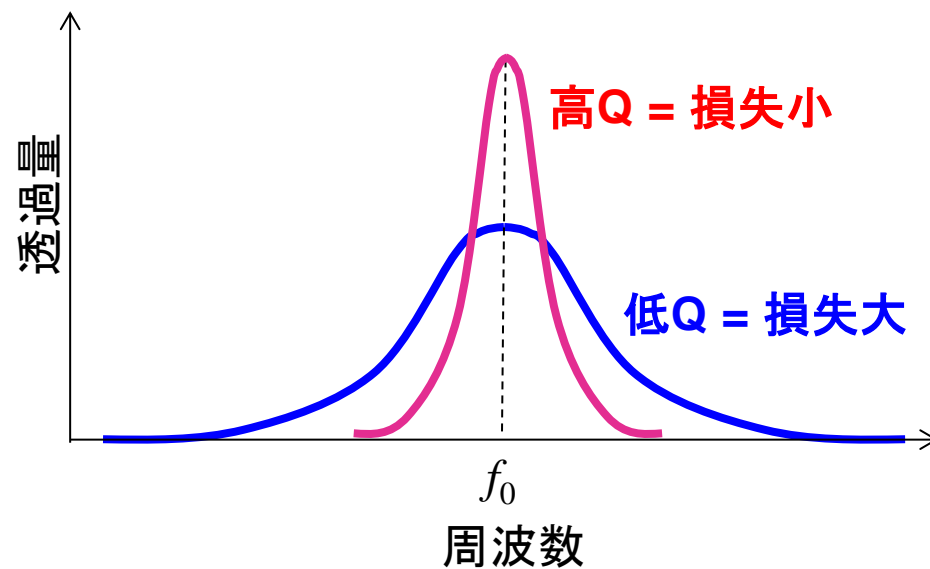
- 共振器の損失が小さい $\rightarrow Q_u$ 大
- 共振器の損失が大きい $\rightarrow Q_u$ 小

● 損失の要因

- 材料損失
 - 導体損失
 - 誘電体損失
- 放射損失など



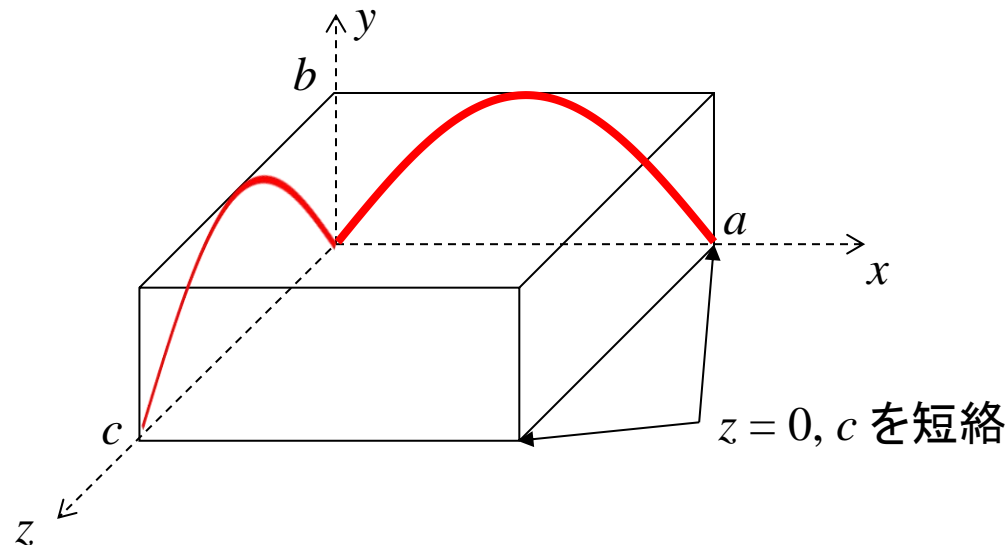
無負荷Q値の評価系



空洞共振器

■ 空洞共振器 (cavity resonator)

- 方形導波管の両端を短絡して構成
 - ・ 中は空洞, 外側は導体
 - ・ 電磁界は導体内に閉じ込められる.
- 高い無負荷Q値 (1000以上) が得られる.



TE₁₀₁モードの電界強度の模式図

無負荷Q値

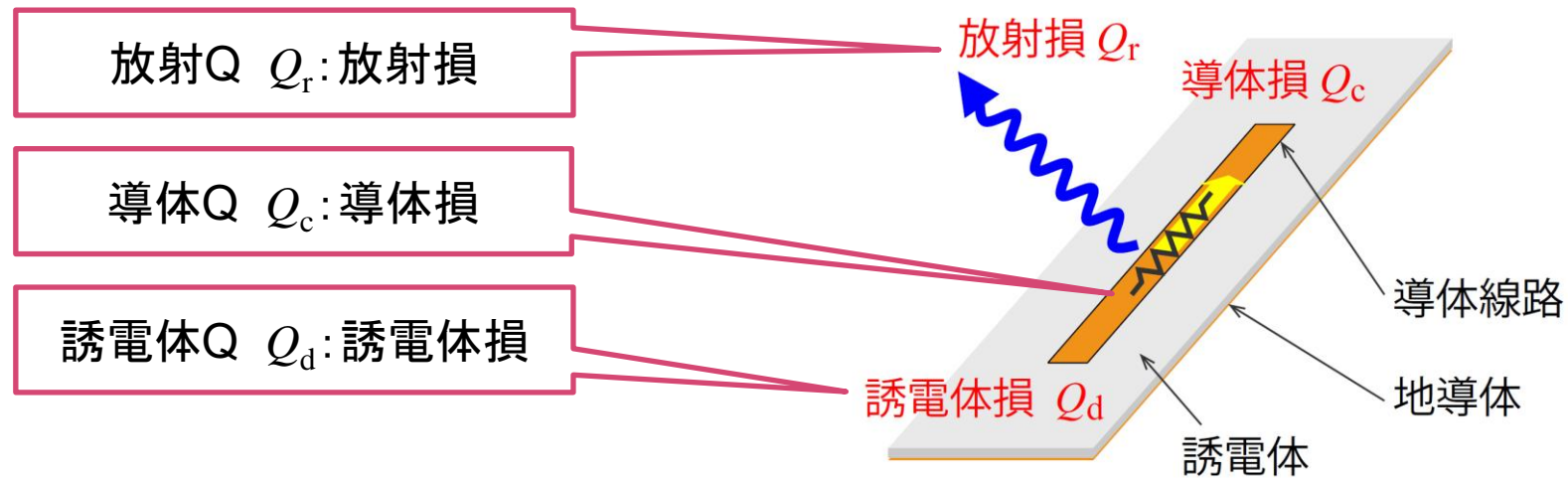
$$\frac{1}{Q_u} = \frac{1}{Q_c}$$

導体Q

平面共振器

■ 平面共振器 (planar resonator)

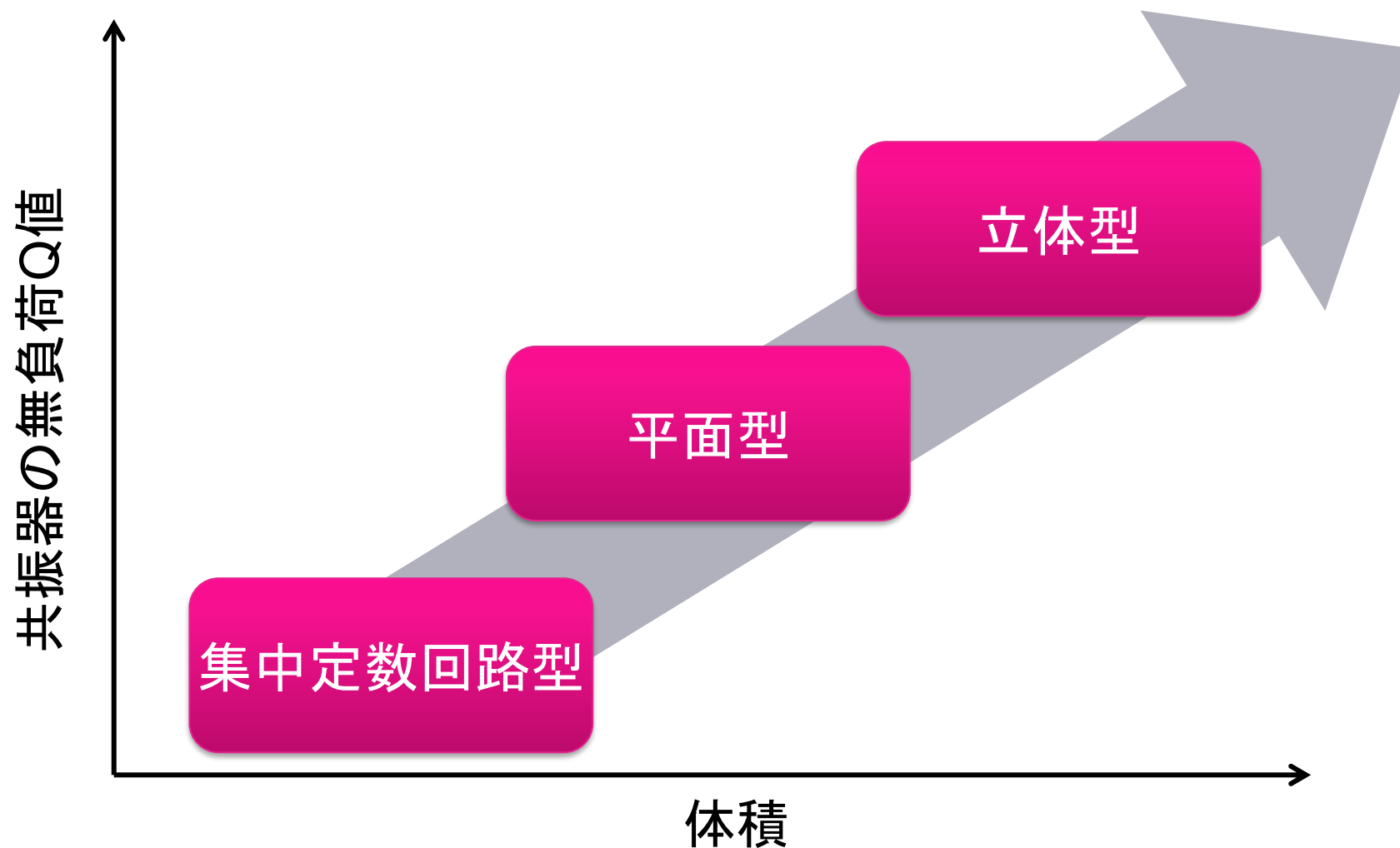
- マイクロストリップ線路などで構成
- 無負荷Q値は50~300程度



無負荷Q値 $\frac{1}{Q_u} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_r}$

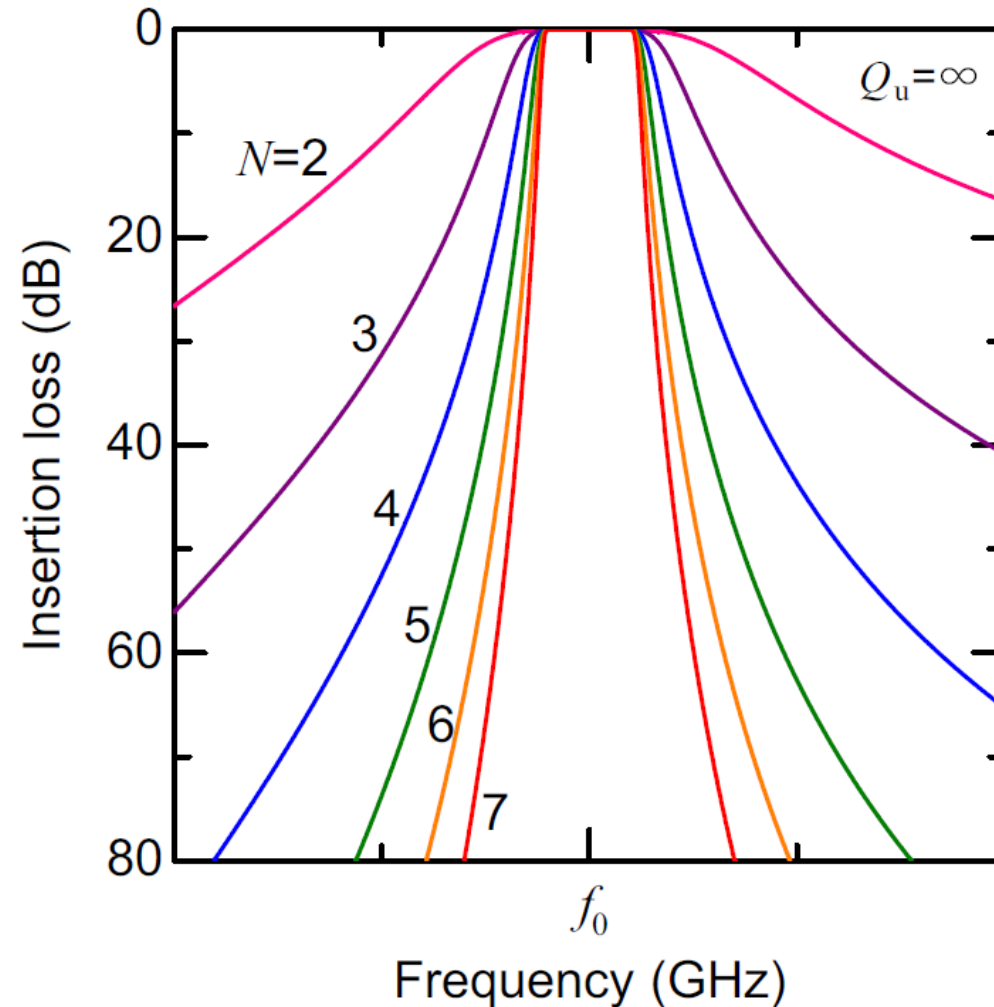
フィルタの体積と無負荷Q値

■フィルタの体積と性能はトレードオフ



共振器段数による特性比較

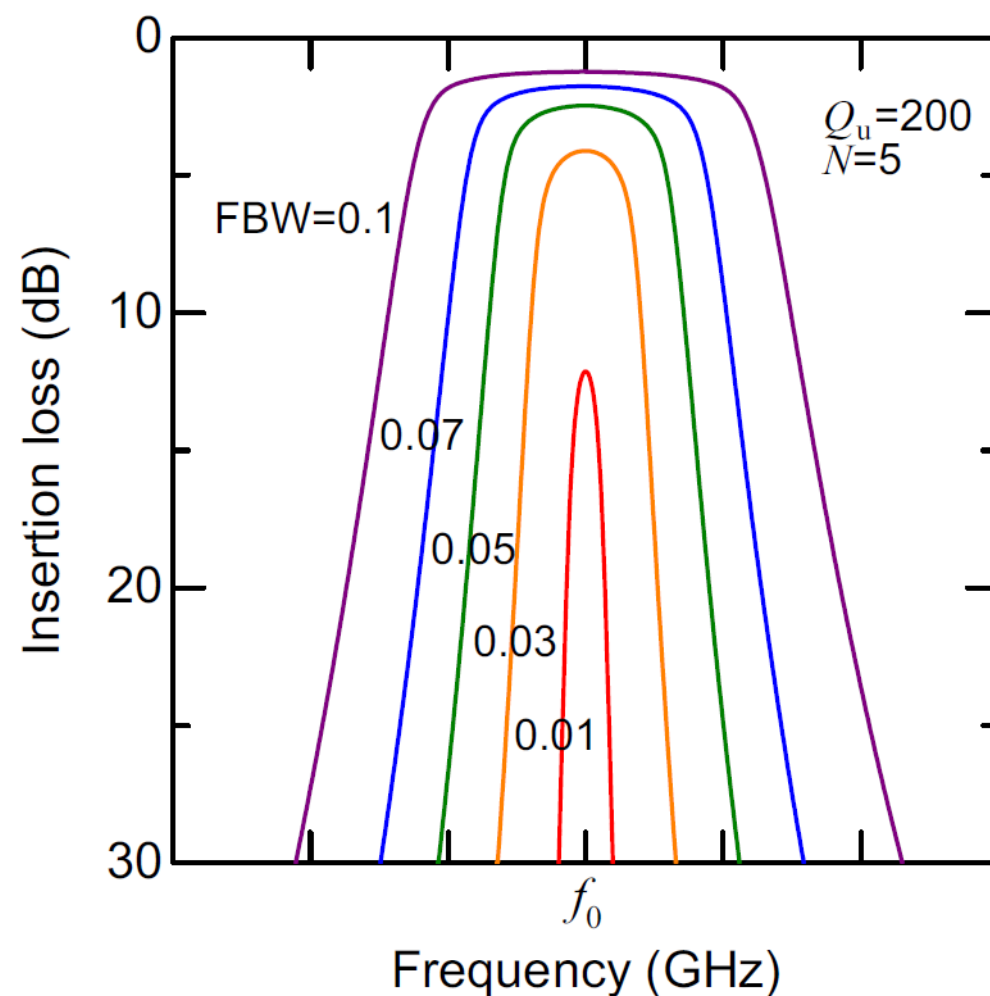
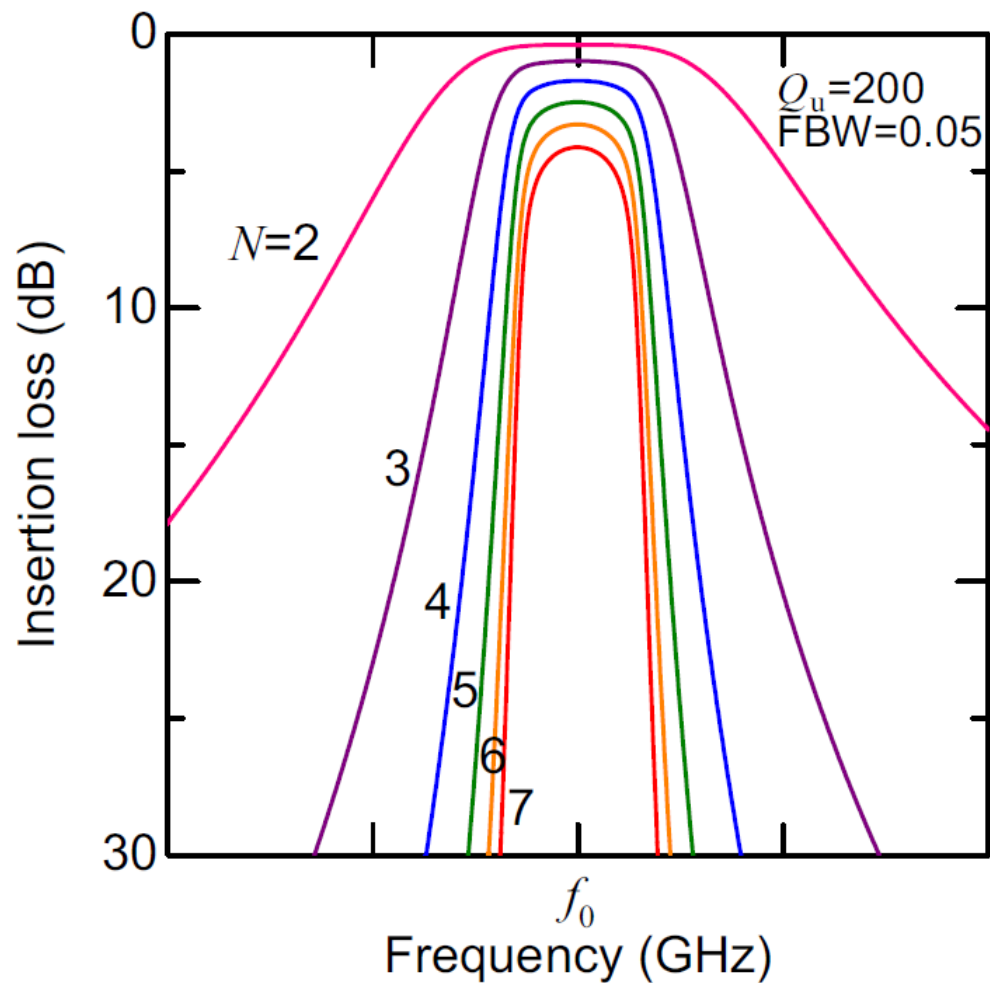
- 共振器段数 N が大きいほど周波数選択特性は急峻



無負荷Q値の与える影響



■ 共振器多段化，狭帯域化するほど挿入損失増加



入門編

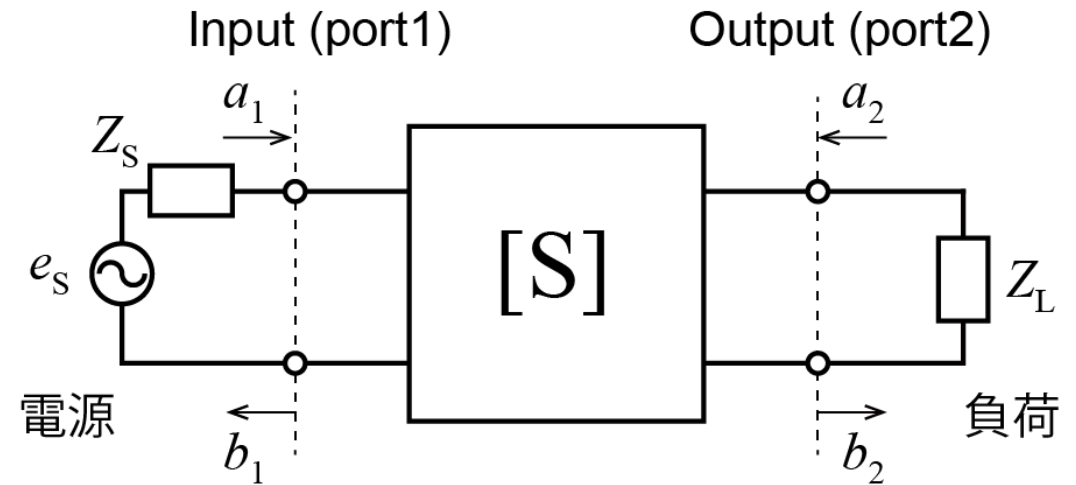
入門編：目次

- フィルタ回路とSパラメータ
- マイクロストリップバンドパスフィルタの設計方法
 - 構造
 - 設計手順
 - 回路合成
 - 共振周波数の設計
 - 結合係数の設計
 - 外部Q値の設計
 - 設計結果
 - 挿入損失の評価

■フィルタ回路

●2ポート回路 (two-port circuit)

- = 2端子対回路
- = 4端子回路網



●Sパラメータ

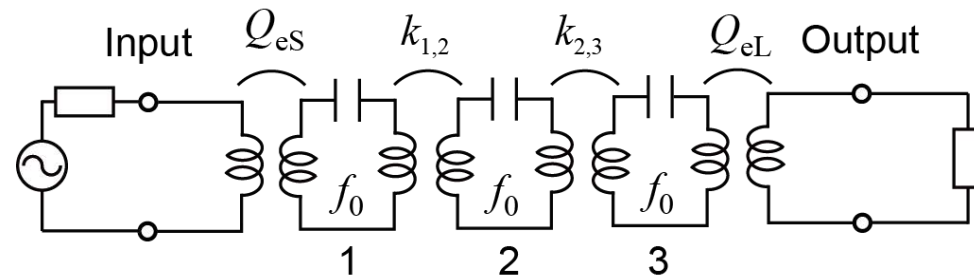
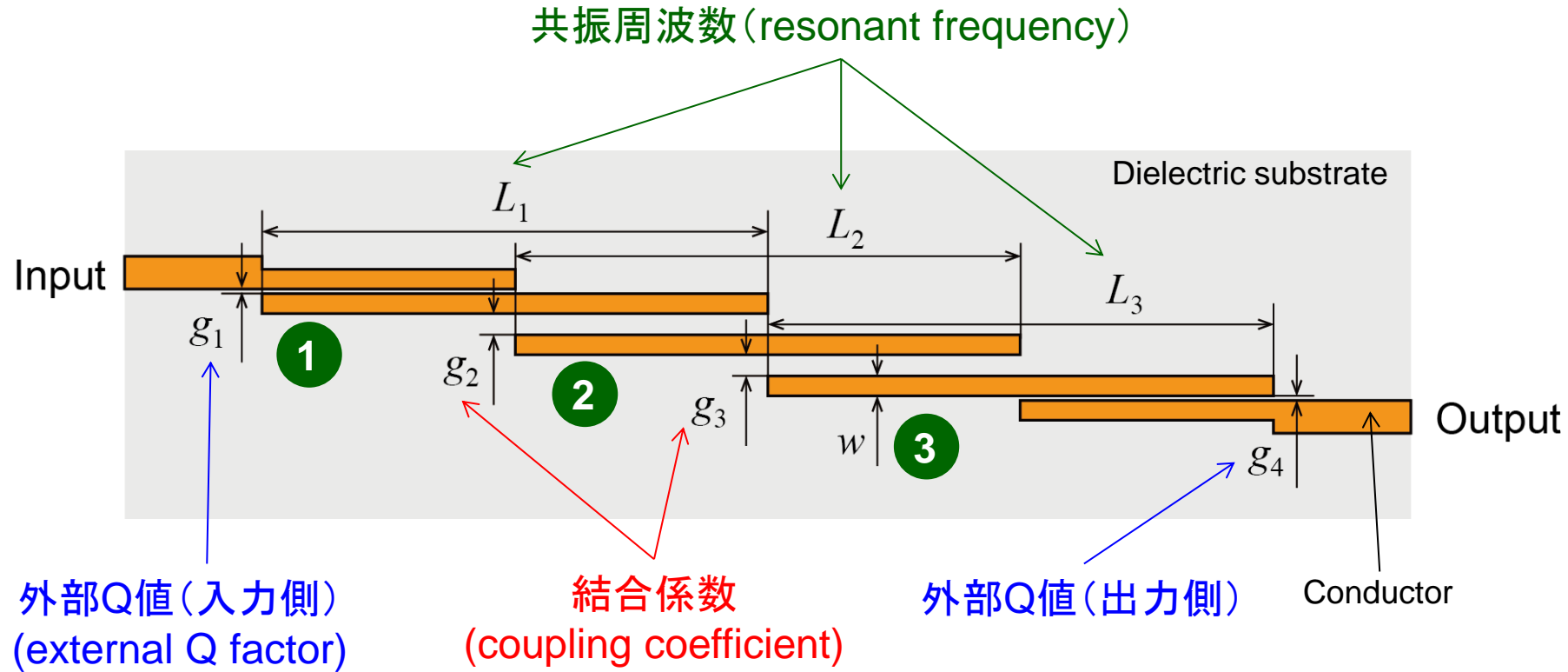
- 相反回路 (reciprocal circuit)

$$S_{21} \left(= \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} \right) = S_{12} \left(= \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=0} \right)$$

- 対称回路 (symmetric circuit)

$$S_{11} \left(= \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} \right) = S_{22} \left(= \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=0} \right)$$

マイクロストリップBPFの構造例



設計手順

- ① BPFの設計仕様を与える.
- ② 設計仕様(今回は理論特性を与える)から g パラメータ(規格化素子値)を求める.
- ③ g パラメータから結合係数, 外部Q値, 共振周波数を求める.
- ④ マイクロストリップ共振器の共振周波数の設計
- ⑤ 結合係数
- ⑥ 外部Q値の設計
- ⑦ 全体構造を与え, 設計仕様を満足するように構造パラメータの微調整

回路合成
(circuit synthesis)

電磁界解析
(電磁界シミュレーション)

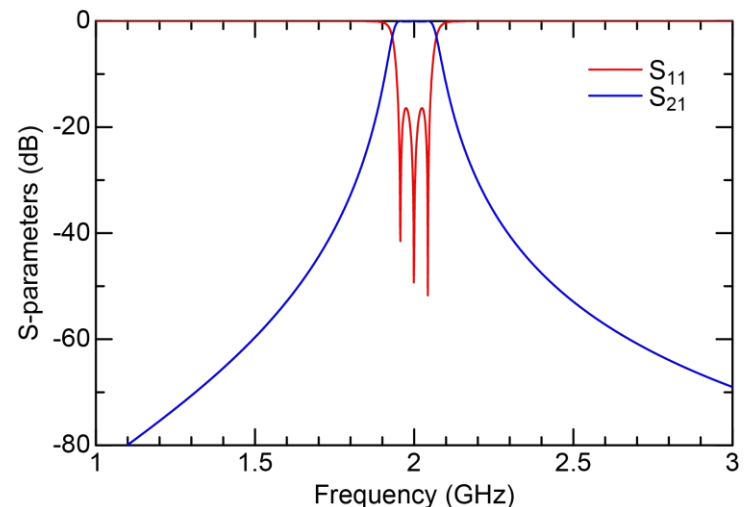
① 設計仕様

■ 通過域の設計仕様

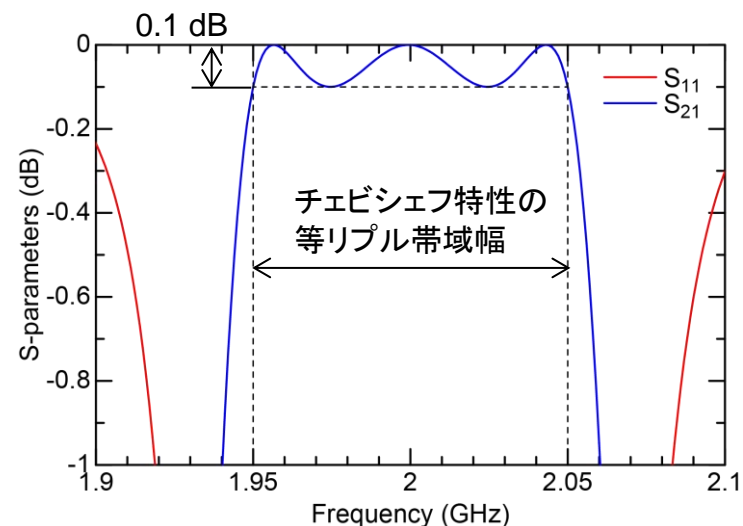
- ✓ 中心周波数: $f_0 = 2 \text{ GHz}$
- ✓ 周波数帯域幅: $\Delta f = 100 \text{ MHz}$
(比帯域幅: $\text{FBW} = \Delta f / f_0 = 5\%$)
- ✓ 伝達関数: チェビシェフ関数
 - リプル幅: $L_{Ar} = 0.1 \text{ dB}$
 - 共振器段数: $N = 3$

□ 誘電体基板

- 比誘電率 $\epsilon_r = 2.6$
- 厚み $t = 1.2 \text{ mm}$



理論特性



通過域の拡大図

②③ 外部Q値と結合係数の公式

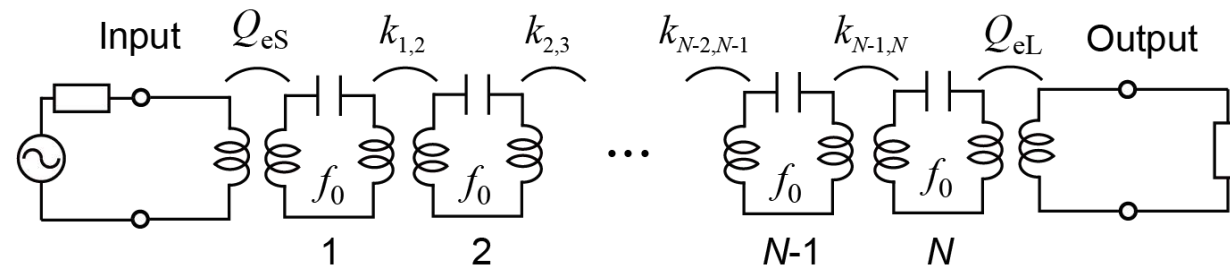
■ 外部Q値と結合係数の理論値を求める公式

外部Q値(入力側) $Q_{eS} = \frac{\Omega_c}{FBW} g_0 g_1$

外部Q値(出力側) $Q_{eL} = \frac{\Omega_c}{FBW} g_N g_{N+1}$

結合係数 $k_{i,i+1} = \frac{FBW}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1)$

ここで, Ω_c : 原型フィルタの遮断角周波数(通常, 1 rad/s), FBW: 比帯域幅, g_i : gパラメータ



共振器N段の帯域通過フィルタの等価回路モデル

②③ 外部Q値と結合係数の計算

■ 外部Q値

$$Q_{eS} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_0 g_1 = \frac{1}{0.05} \times 1.0316 = \underline{20.632}$$

$$Q_{eL} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_3 g_4 = \frac{1}{0.05} \times 1.0316 = \underline{20.632}$$

■ 結合係数

$$k_{1,2} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} = \frac{0.05}{1} \frac{1}{\sqrt{1.0316 \times 1.1474}} = \underline{0.0460}$$

$$k_{2,3} = k_{1,2} = \underline{0.0460}$$

表: 原型低域通過フィルタの規格化素子値 (チェビシェフ特性)

For passband ripple $L_{Ar} = 0.1$ dB $g_0=1, \Omega_c=1$

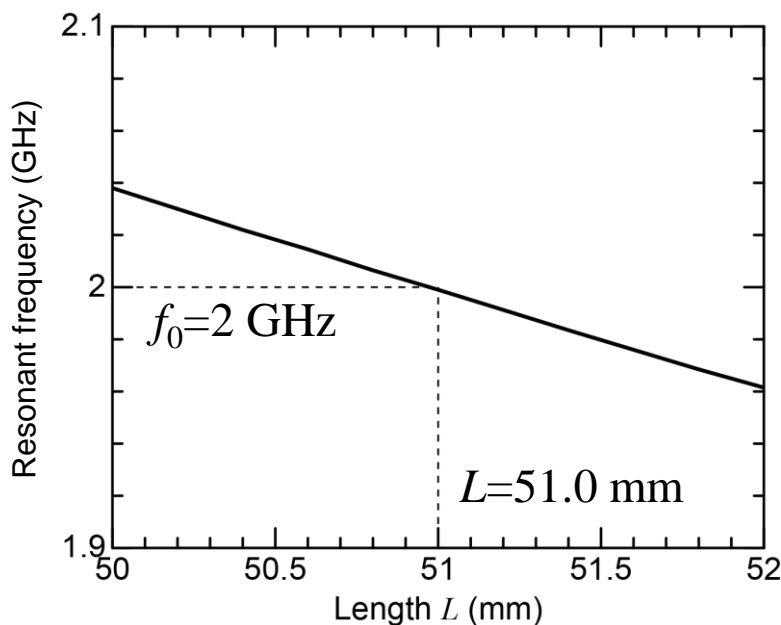
N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	0.3052	1.0								
2	0.8431	0.6220	1.3554							
3	1.0316	1.1474	1.0316	1.0						
4	1.1088	1.3062	1.7704	0.8181	1.3554					
5	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468	1.0				
6	1.1681	1.4040	2.0562	1.5171	1.9029	0.8618	1.3554			
7	1.1812	1.4228	2.0967	1.5734	2.0967	1.4228	1.1812	1.0		
8	1.1898	1.4346	2.1199	1.6010	2.1700	1.5641	1.9445	0.8778	1.3554	
9	1.1957	1.4426	2.1346	1.6167	2.2054	1.6167	2.1346	1.4426	1.1957	1.0

④ 共振周波数の設計

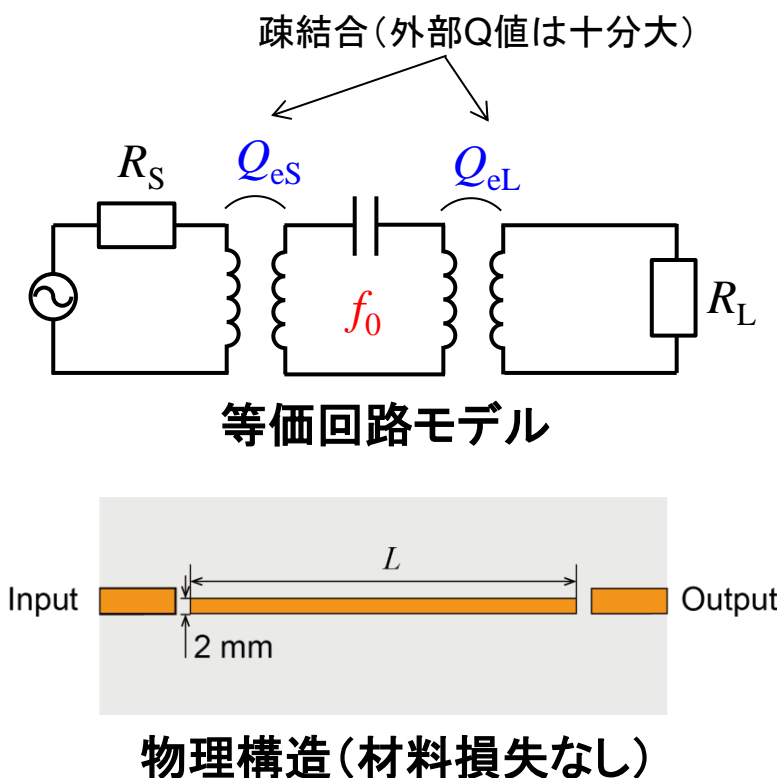
■ 共振器長 L の概算

- 半波長共振器の場合, $L = \frac{\lambda_g}{2} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$
 - ここで, λ_g : 管内波長, ϵ_{eff} : 実効比誘電率

■ 電磁界シミュレーションによる設計



共振器長に対する共振周波数の変化



⑤ 結合係数の評価式

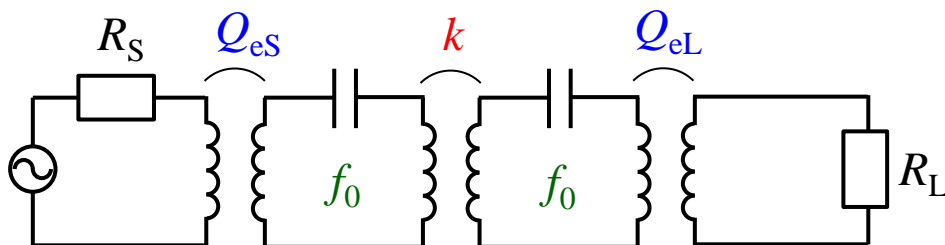
■ 結合係数 k の評価式

● 同調共振器の場合

$$k = \frac{f_H^2 - f_L^2}{f_H^2 + f_L^2}$$

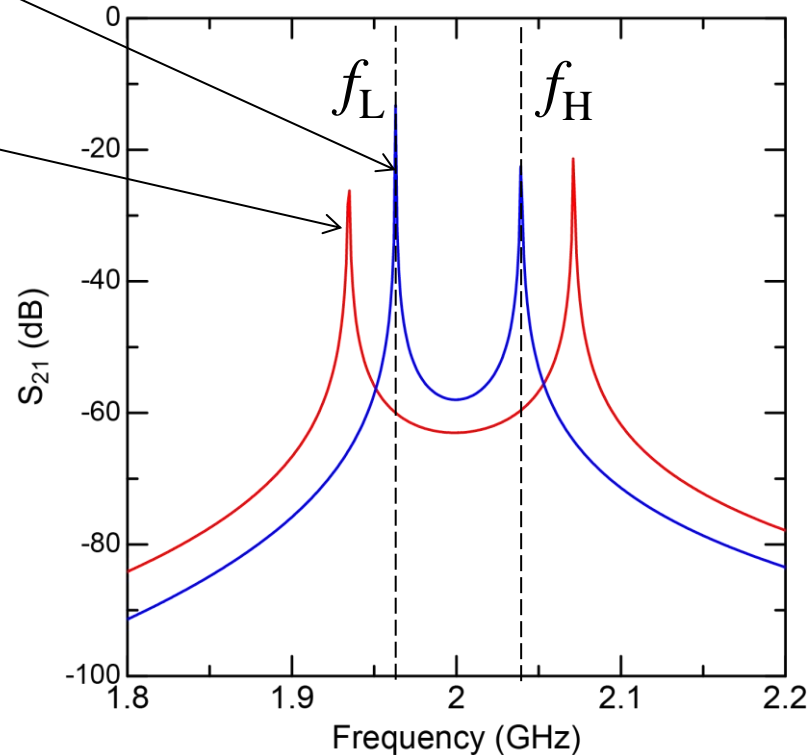
- ここで, f_L, f_H : ピーク周波数

前提: 外部Q値が十分大きい ($|S_{21}| < -10$ dBが目安)
放射Q値も十分大きい



結合係数が
小さい場合

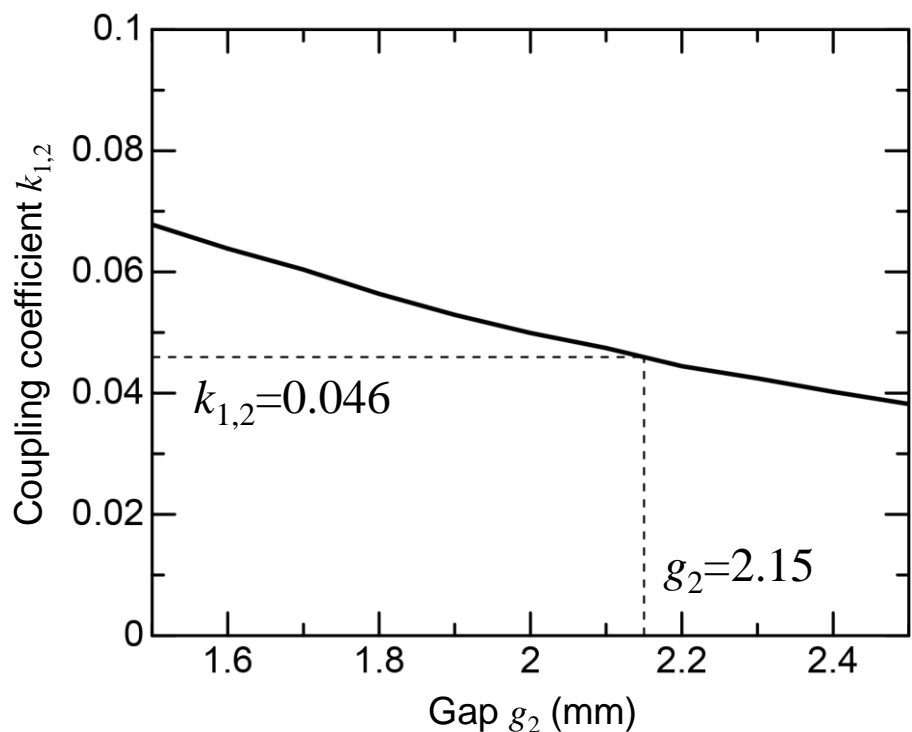
結合係数が
大きい場合



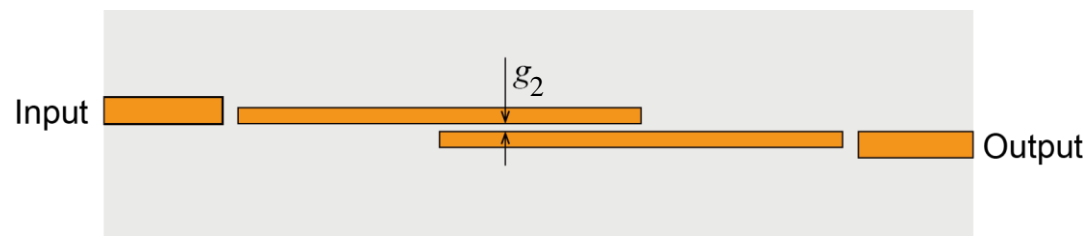
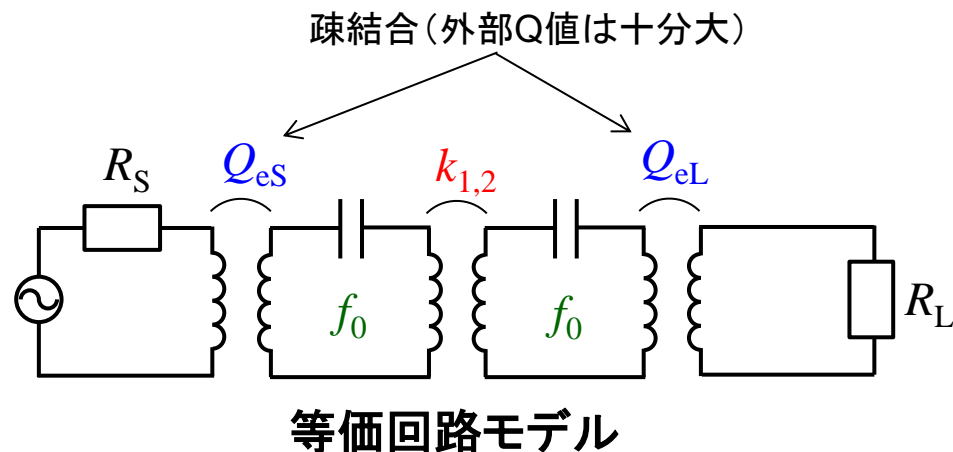
結合係数の評価時の透過特性の一例

⑤ 結合係数の設計

■ 電磁界シミュレーションによる設計



共振器間のギャップに対する結合係数の変化



物理構造 (材料損失なし)

⑥ 外部Q値の評価式

■ 外部Q値の評価

- 入力側の外部Q値 Q_{eS} の評価式

$$Q_{eS} = Q_L = \frac{f_0}{\Delta f_{3dB}}$$

- ここで,

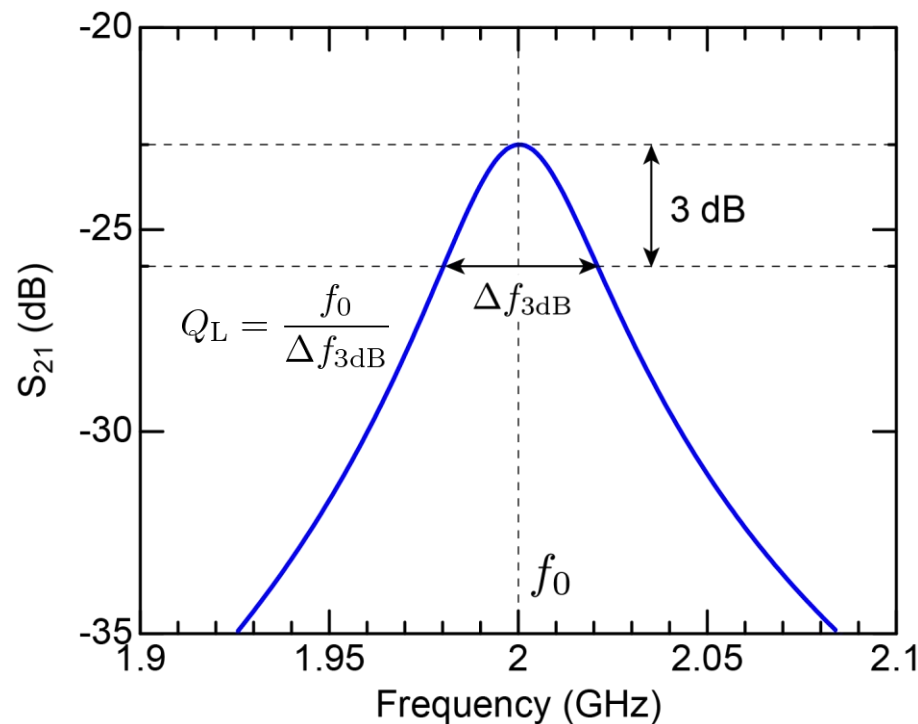
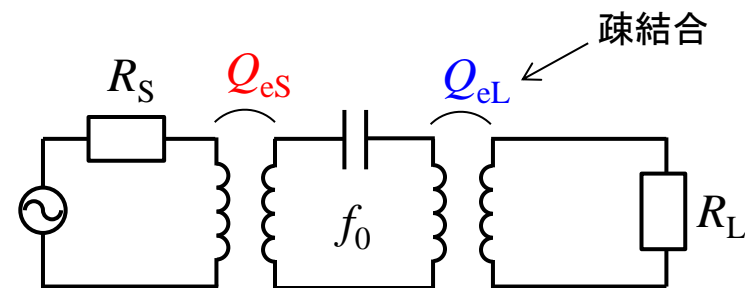
- Q_L : 負荷Q値 (loaded Q factor)

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_{eS}} + \frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_{eL}}$$

無損失: $Q_u \rightarrow \infty$

出力が疎結合: $Q_{eL} \rightarrow \infty$

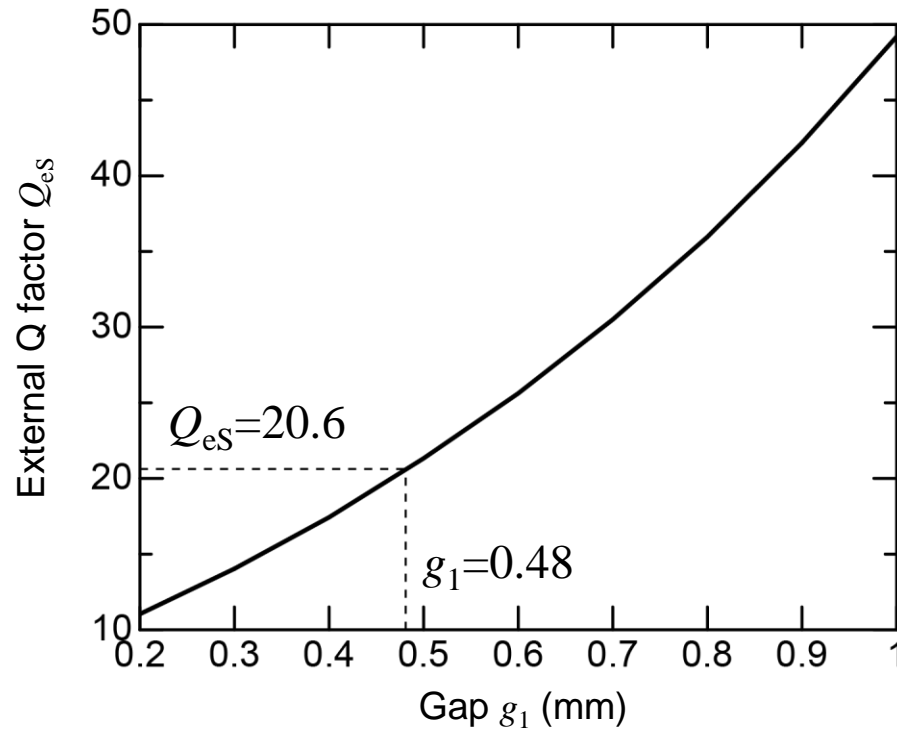
- f_0 : 共振周波数
- Δf_{3dB} : 電力半値幅



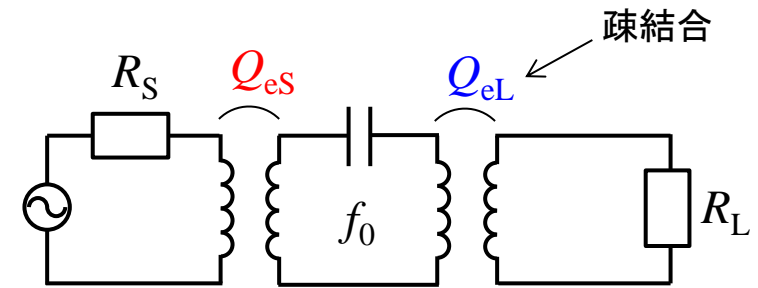
外部Q値評価時の透過特性の一例

⑥ 外部Q値の設計

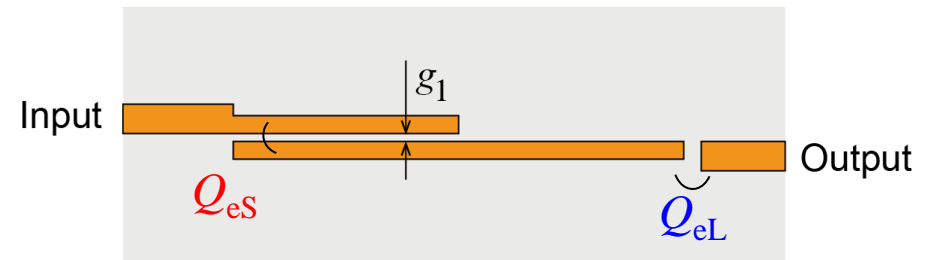
■ 電磁界シミュレーションによる設計



入力線路と共振器との間のギャップに対する外部Q値の変化

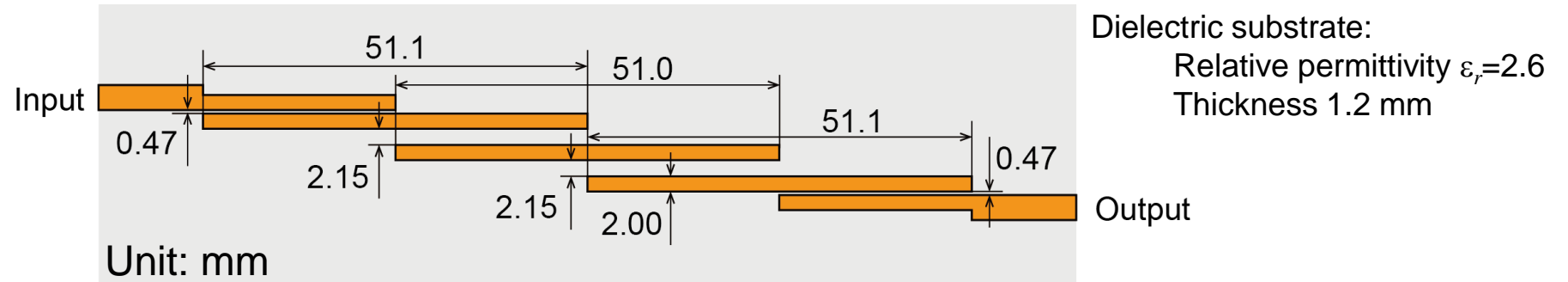


等価回路モデル

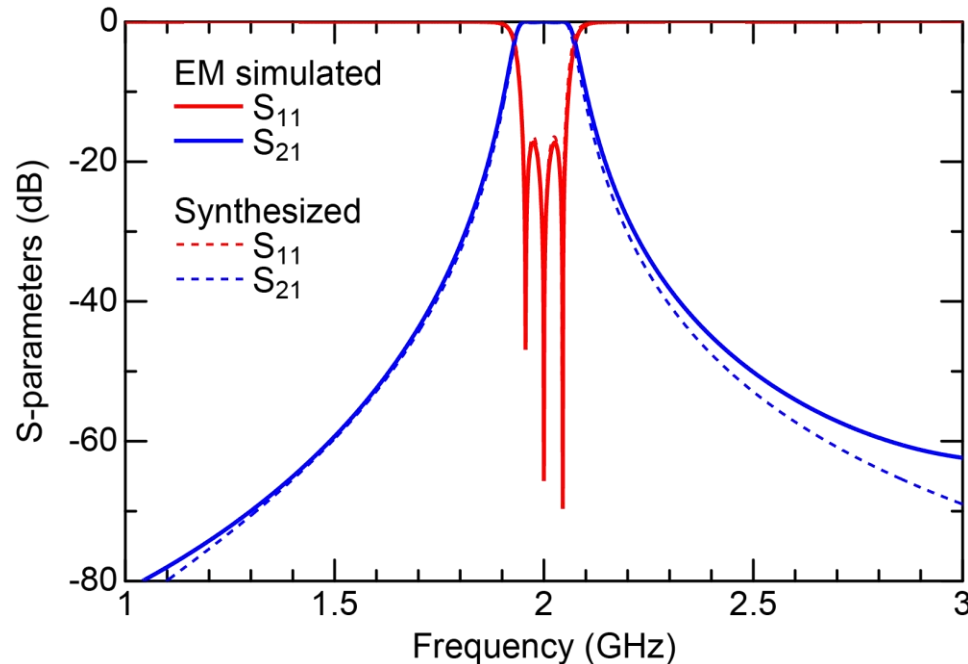


物理構造(材料損失なし)

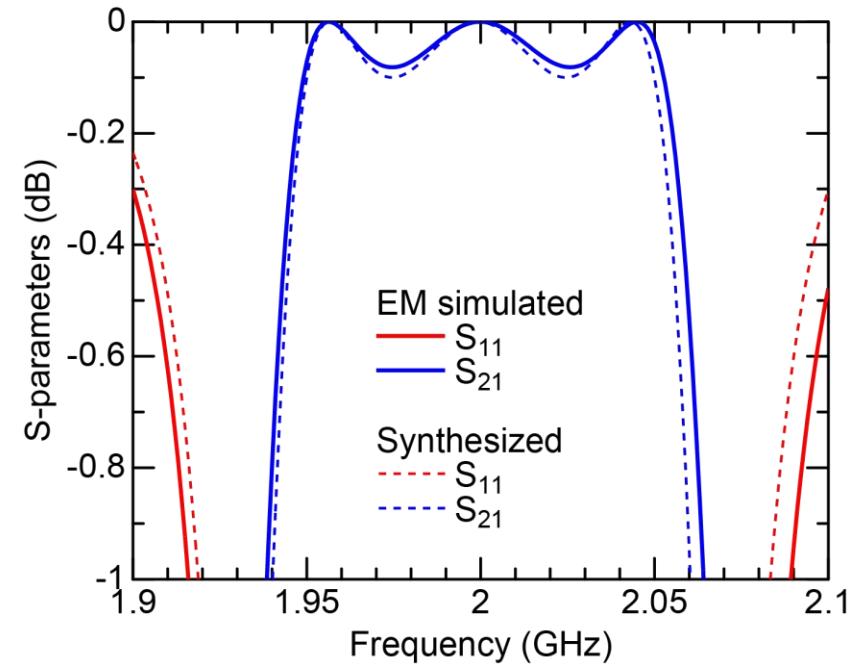
⑦ マイクロストリップBPFの設計結果



パラレル結合マイクロストリップBPFの設計結果(微調整後)



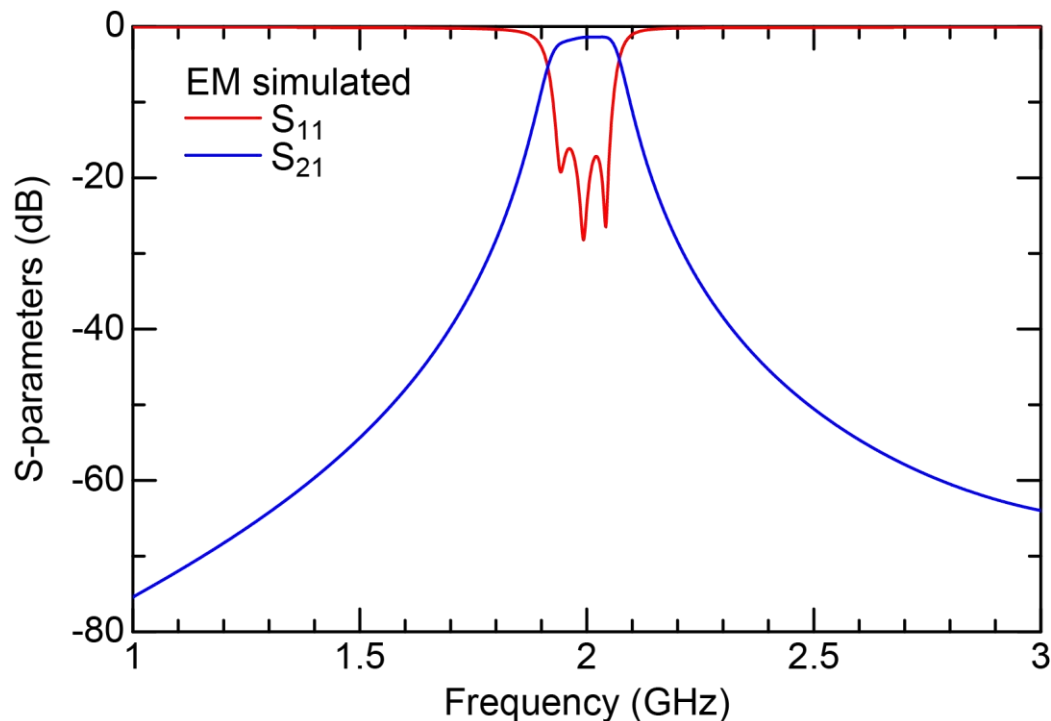
設計したBPFの周波数特性



通過域の拡大図

材料損失を考慮した場合

■ 電磁界シミュレーションによる評価



材料損失を考慮したときのフィルタ特性

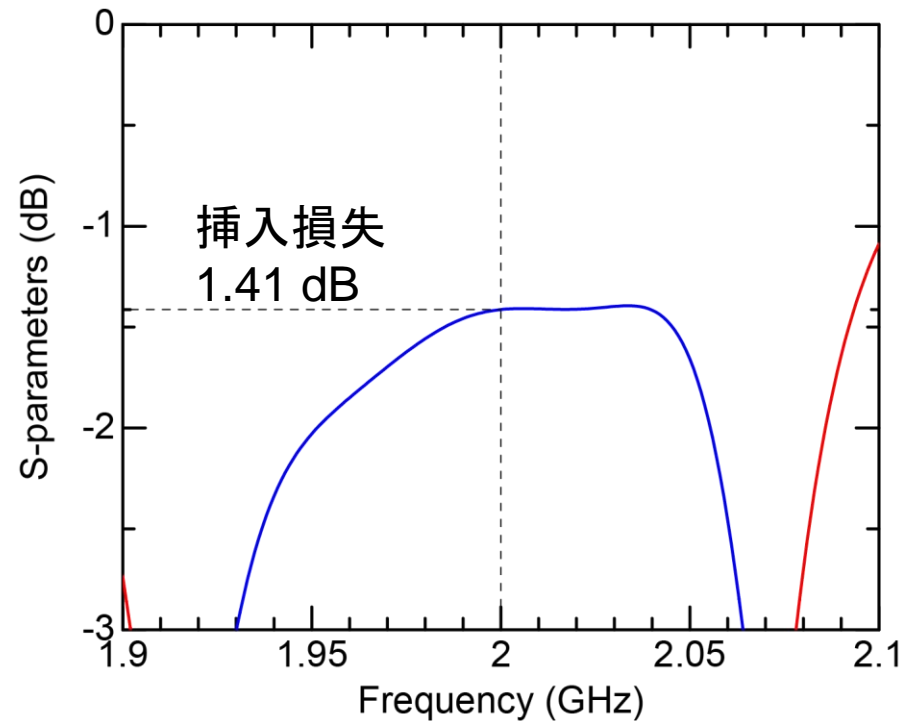
誘電体基板:

比誘電率 $\epsilon_r=2.6$, 誘電正接 $\tan\delta=1 \times 10^{-3}$

厚み 1.2 mm

銅の導電率: $\sigma=5.8 \times 10^7$ S/m

放射損失(遮蔽ボックスなし, 放射境界でシミュレーション)



通過域の拡大図

【補足】 Q値の定義

■ Q値 (quality factor)

● 定義

$$Q = \omega \frac{\text{平均蓄積エネルギー}}{\text{単位時間あたりのエネルギー損失}} = \omega \frac{W_m + W_e}{P_{\text{loss}}}$$

● 共振器におけるエネルギー

• LCR直列共振器の複素電力

$$P = P_{\text{loss}} + 2j\omega(W_m - W_e)$$

– ここで,

$$\text{磁気エネルギーの時間平均} \quad W_m = \frac{1}{4}L|I|^2$$

$$\text{電気エネルギーの時間平均} \quad W_e = \frac{1}{4}C|V_C|^2 = \frac{1}{4}|I|^2 \frac{1}{\omega^2 C}$$

– 共振周波数では, $W_e = W_m$

● 無負荷Q値 (LCR直列共振器)

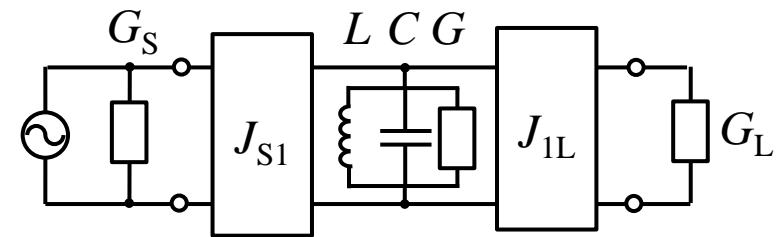
$$Q_0 = \omega_0 \frac{2W_m}{P_{\text{loss}}} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

【補足】 3つのQ値

■ フィルタ設計で現れる3つのQ値

- 無負荷Q値 Q_u (unloaded Q factor)
 - 共振器内の損失抵抗によるQ値 (共振器の損失の大きさを表す)
- 負荷Q値 Q_L (loaded Q factor) : **直接観測可能**
 - 外部電源の内部抵抗や負荷抵抗, 共振器回路自身の損失抵抗によるQ値
- 外部Q値 Q_{eS}, Q_{eL} (external Q factor)
 - 外部電源の内部抵抗や負荷抵抗によるQ値
- 3つの関係

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_{eS}} + \frac{1}{Q_{eL}}$$



等価回路 (並列共振回路の場合)

【補足】挿入損失の見積もり

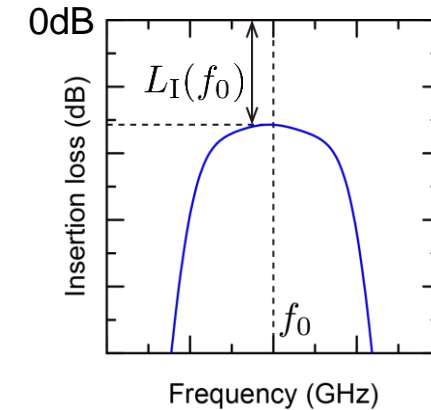
■ 中心周波数での挿入損失の見積もり式

- すべての共振器の無負荷Q値が異なる場合

$$L_I(f_0) = 4.343 \frac{f_0}{\Delta f} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{Q_{u,i}} \quad (\text{dB})$$

- すべての共振器の無負荷Q値が同じ場合

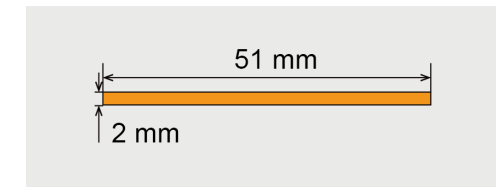
$$L_I(f_0) = 4.343 \frac{f_0}{\Delta f} \frac{1}{Q_u} \sum_{i=1}^N g_i \quad (\text{dB})$$



■ 無負荷Q値の見積もり式

- すべての共振器の無負荷Q値が同じ場合

$$Q_u = 4.343 \frac{f_0}{\Delta f} \frac{1}{L_I(f_0)} \sum_{i=1}^N g_i$$



$\Delta f/f_0=0.05$, $L_I=1.41$ (dB), $g_1=g_3=1.0316$, $g_2=1.1474$

➡ $Q_u = 198$

基礎編

基礎編：目次

- 挿入損失と反射損失の定義
- はしご型回路
 - フィルタの伝達関数
 - 原型低域通過フィルタ
- 原型LPFの回路合成法
 - 回路合成手順
 - 回路合成例
- 各種フィルタの回路合成
 - インピーダンススケージング
 - 周波数変換
- インバータを用いたフィルタ回路
 - K/Jインバータの定義
 - K/Jインバータを用いた原型LPF
 - K/Jインバータを用いたBPF
 - スロープパラメータ
- 結合係数と外部Q値を用いたフィルタ回路
 - 結合係数
 - 外部Q値

電力透過係数の定義

■ 電力透過係数 $|T(s)|^2$

- 電源から取り出せる**最大有能電力** P_{\max} (maximum available power) と **負荷における消費電力** P_{load} の比で定義

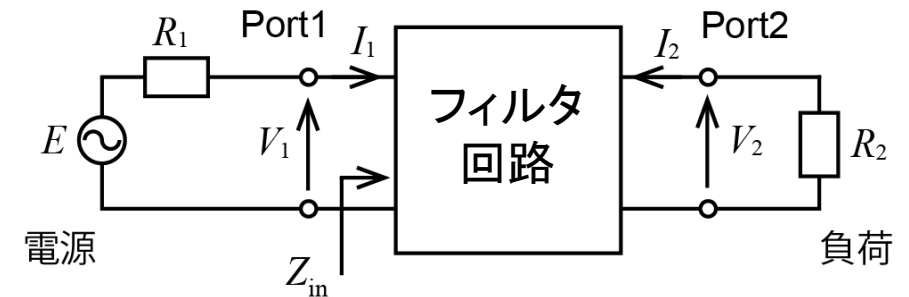
$$|T(s)|^2 = \frac{P_{\text{load}}}{P_{\max}} = \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|^2$$

- ここで,
 - s : 複素角周波数(後述)
 - 電源の最大有能電力

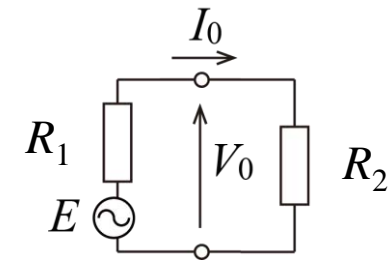
$$P_{\max} = \frac{|V_1(s)|^2}{4R_1} \quad (\text{共役整合が前提})$$

- フィルタ回路の負荷における消費電力

$$P_{\text{load}} = \frac{|V_2(s)|^2}{R_2}$$



負荷での消費電力計算時



最大有能電力計算時

挿入損失の定義

■ 挿入損失 (insertion loss) L_I (dB)

- 電力透過係数の逆数 (電力損失量を表す) のdB表示

$$\begin{aligned} L_I &= 10 \log_{10} \frac{1}{|T(s)|^2} \\ &= -10 \log_{10} |S_{21}(s)|^2 \end{aligned}$$

■ 伝達関数 (transfer function) $T(s)$

- 電圧透過係数の角周波数の関数

$$|T(j\omega)|^2 = T(s)T^*(s)|_{s=j\omega} = T(s)T(-s)|_{s=j\omega} = \frac{4R_1}{R_2} \frac{V_2(s)V_2(-s)}{V_1(s)V_1(-s)} \quad \Rightarrow \quad T(s) = \sqrt{\frac{4R_1}{R_2} \frac{V_2(s)}{V_1(s)}}$$

- 伝達関数の例

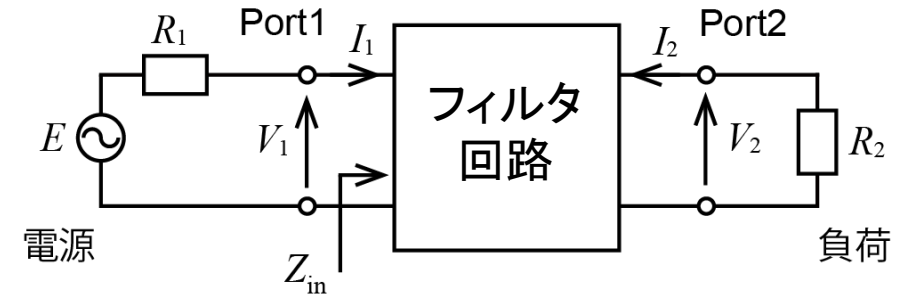
– チェビシェフ関数, バターワース関数

反射損失の定義

■ 反射係数

$$\Gamma(s) = \pm \frac{Z_{in}(s) - R_1}{Z_{in}(s) + R_1} \quad \left[\begin{array}{l} \text{符号が+ : 電圧反射係数} \\ \text{符号が- : 電流反射係数} \end{array} \right]$$

ここで, Z_{in} : 電源から負荷側を見込んだ入力インピーダンス



■ 電力反射係数 $|\Gamma(s)|^2$

- 無損失回路の場合

– 反射電力 + 透過電力 = 有能電力 ➡ $|\Gamma(j\omega)|^2 + |T(j\omega)|^2 = 1$

■ 反射損失 (return loss) L_R (dB)

- 電力反射係数の逆数 (電力損失量を表す) のdB表示

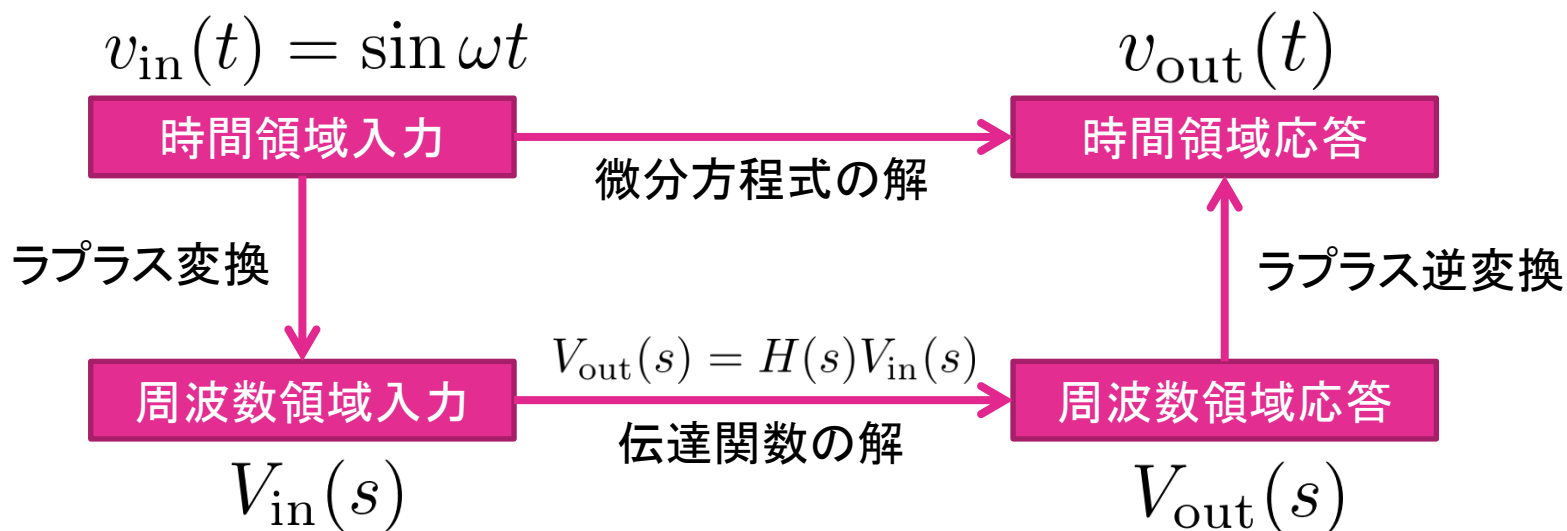
$$\begin{aligned} L_R &= 10 \log_{10} \frac{1}{|\Gamma(s)|^2} \\ &= -10 \log_{10} |S_{11}(s)|^2 \end{aligned}$$

複素角周波数

■ 複素角周波数 $s = \sigma + j\omega$

$$e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

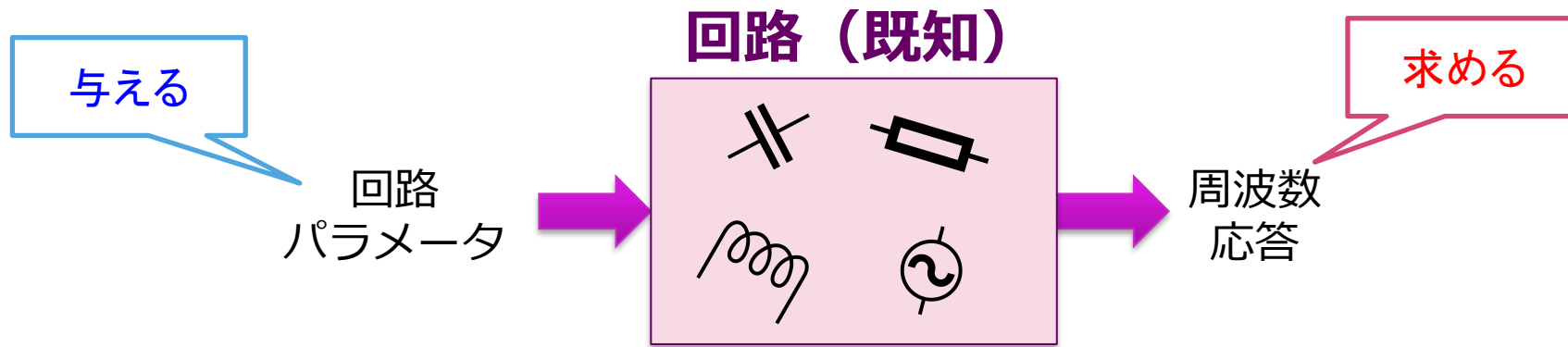
- $\sigma > 0$: 振幅が時間とともに増大 (受動回路では不適)
 - $\sigma < 0$: 振幅が時間とともに減衰
 - $\sigma = 0$: 振幅が一定
- } s平面(複素平面)の左半平面にあれば安定



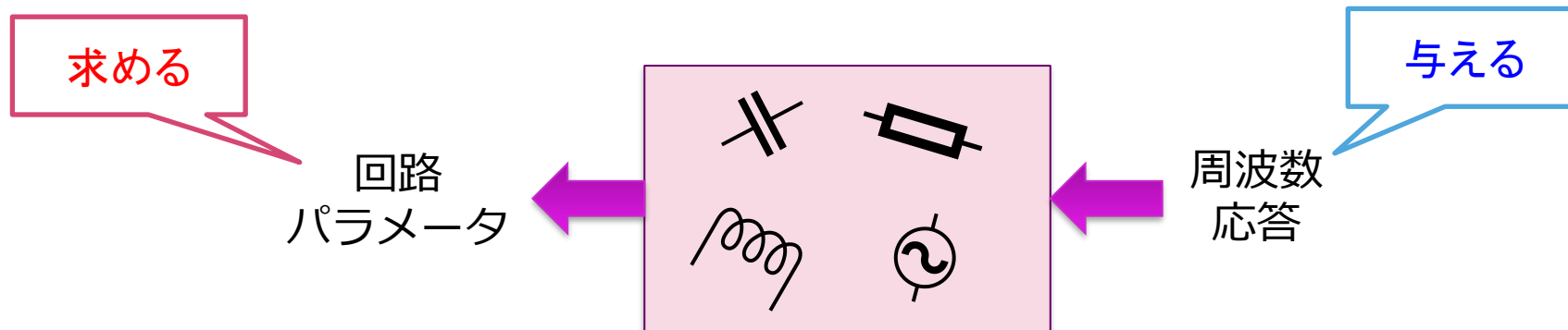
回路解析と回路合成

■ 回路解析と回路合成

- 回路(網)解析: 順問題 → 比較的容易



- 回路(網)合成: 逆問題 → 難しいが, フィルタには優れた合成法がある



■ よく知られている回路合成法は以下の2つ

● 映像パラメータ法

- 映像インピーダンス Z_{01} , Z_{02} と映像伝送量 θ を用いる.
- 所望のカットオフ周波数と減衰特性を得るよう設計
 - 例) 定K型フィルタ, 誘導M型フィルタ
- 所望の周波数応答を得るのは困難

● 動作パラメータ法／挿入損失法(現在の主流)

- 動作伝達係数(透過係数 $= \frac{\text{出力}}{\text{入力}}$)または動作伝送係数(損失 $= \frac{\text{入力}}{\text{出力}}$)を基にした回路合成
- 与えられた周波数応答を得るよう設計
 - 例) チェビシェフフィルタ, バターワースフィルタ
- 所望の周波数応答が得られる.

挿入損失法によるフィルタ設計

■フィルタ設計の流れ

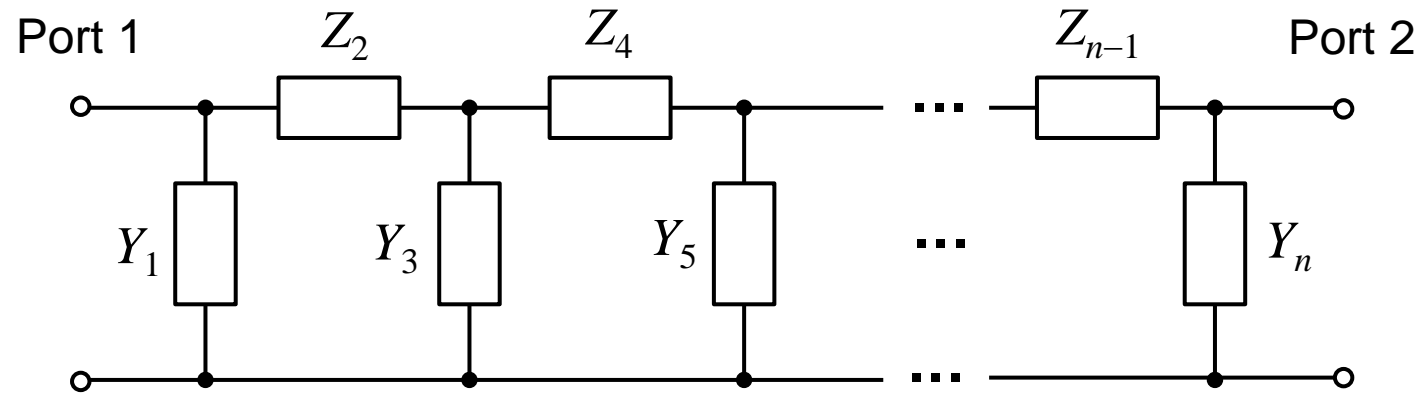


はしご型回路

■ フィルタ回路の構成方法

● はしご型回路 (ラダー型回路, Cauer回路)

- 古典的フィルタ理論の出発点



はしご型回路の一例

- 直列インピーダンス Z_i と並列アドミタンス Y_i で構成
- Z_i, Y_i : インダクタ L またはキャパシタ C , あるいはそれらの組み合わせからなる回路素子

伝達関数

■ 伝達関数 (transfer function)

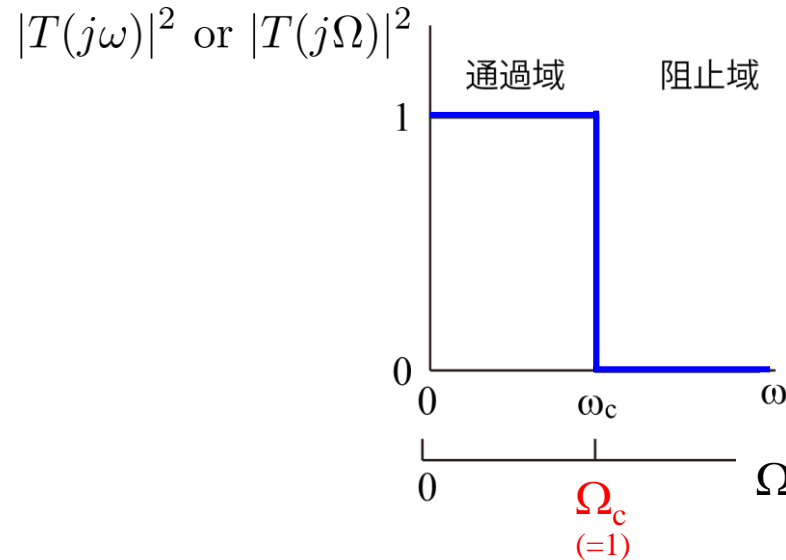
- 所望の特性をLC回路で実現できる**伝達関数**(=近似関数)を与える.
 - 「**特性関数**」を用いてフィルタ特性を近似する.
 - 電力透過係数を ω の有理関数で特性近似

$$|T(\omega)|^2 = |S_{21}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 |K(\omega)|^2}$$

- ϵ : リプル係数
- K : **特性関数**
- 特性関数の例
 - バターワース関数 (最平坦特性, ワグナー特性)
 - チェビシェフ関数 (等リプル特性)

低域通過フィルタの理想特性

■ 低域通過フィルタの理想特性



$$\Omega = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \Omega_c$$

規格化角周波数 Ω
(normalized angular frequency)

● 伝達関数

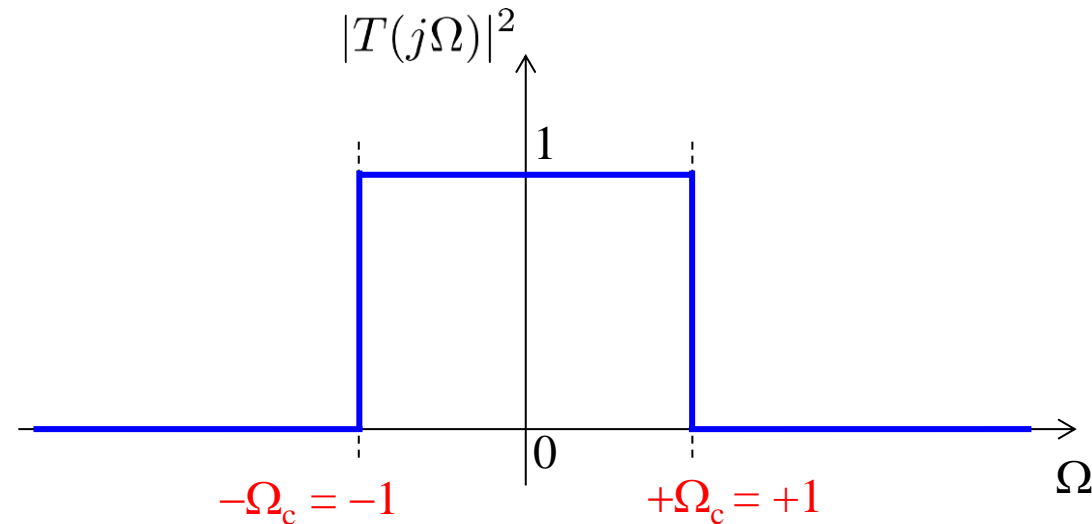
$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 |K(\Omega)|^2}$$

- ここで、理想特性関数 $\epsilon K(\Omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \Omega \leq 1) \\ \infty & (\Omega > 1) \end{cases}$

規格化角周波数

■ 規格化角周波数 Ω

- 通過域と阻止域の境界: 遮断角周波数 Ω_c (通常, $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$)
- 負の角周波数領域まで考える (\rightarrow バンドパス特性を示す)
- 複素角周波数 s との関係 $s = j\Omega$



規格化角周波数領域における原型LPFの通過特性

バターワース関数

■ N 次バターワース (Butterworth) 関数

● 伝達関数

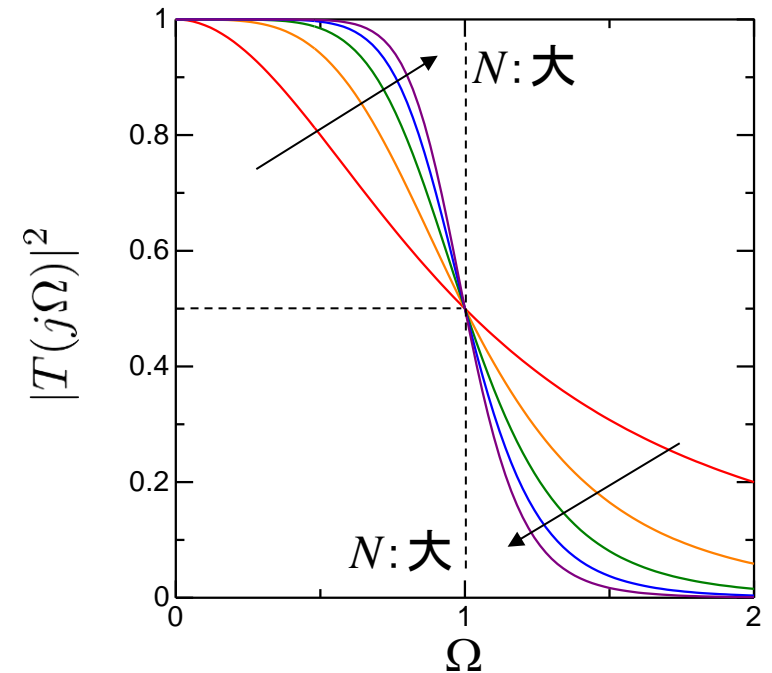
$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Omega^{2N}}$$

● 特性関数

$$K(\Omega) = \Omega^N$$

● 特徴

- $\Omega = 0$ と $\Omega = \infty$ でのみ常に理想値と一致
- 通常, リプル係数 $\epsilon = 1$
 - $\Omega = 1$ のとき $|T(j\Omega)|^2 = 0.5$
- $\Omega = 0$ で $2N$ 次の微分まで0
 - **最平坦特性** (Maximally flat) と呼ばれる理由
 - **反射零点** は $\Omega = 0$ の **1点** のみ



規格化角周波数領域における
バターワース特性

【補足】バターワース特性の極の配置

■ 伝達関数の極

● 伝達関数の分母多項式=0の解

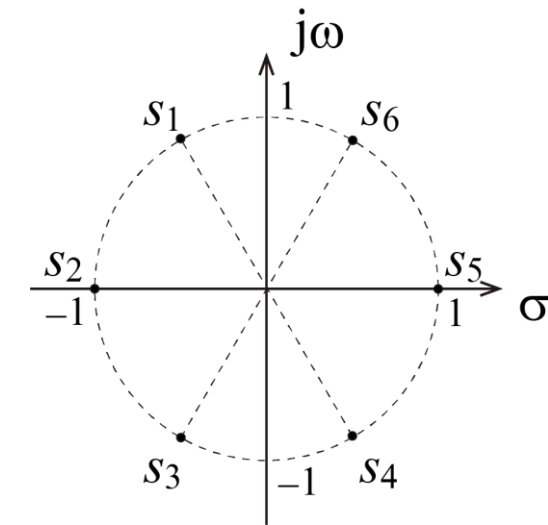
$$1 + \Omega^{2N} = 0 \rightarrow 1 + (-s^2)^N = 0$$

• $2N$ 個の解が存在

$$1 + (-1)^N s^{2N} = 0$$

$$s^{2N} = (-1)^{1-N} = e^{j\{(N-1)\pi + 2k\pi\}}$$

$$\therefore s_k = e^{j\frac{N-1+2k}{2N}\pi} \quad (k = 1, 2, \dots, 2N)$$



3次の場合

- 半径1 の円周上に等間隔である.
- かつ実数軸および虚数軸の両方に対して対称に配置される.

■ N 次チェビシェフ (Chebyshev) 関数

● 伝達関数

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega)} \quad (0 < \epsilon < 1)$$

- 特性関数 $K(\Omega) = T_N(\Omega)$

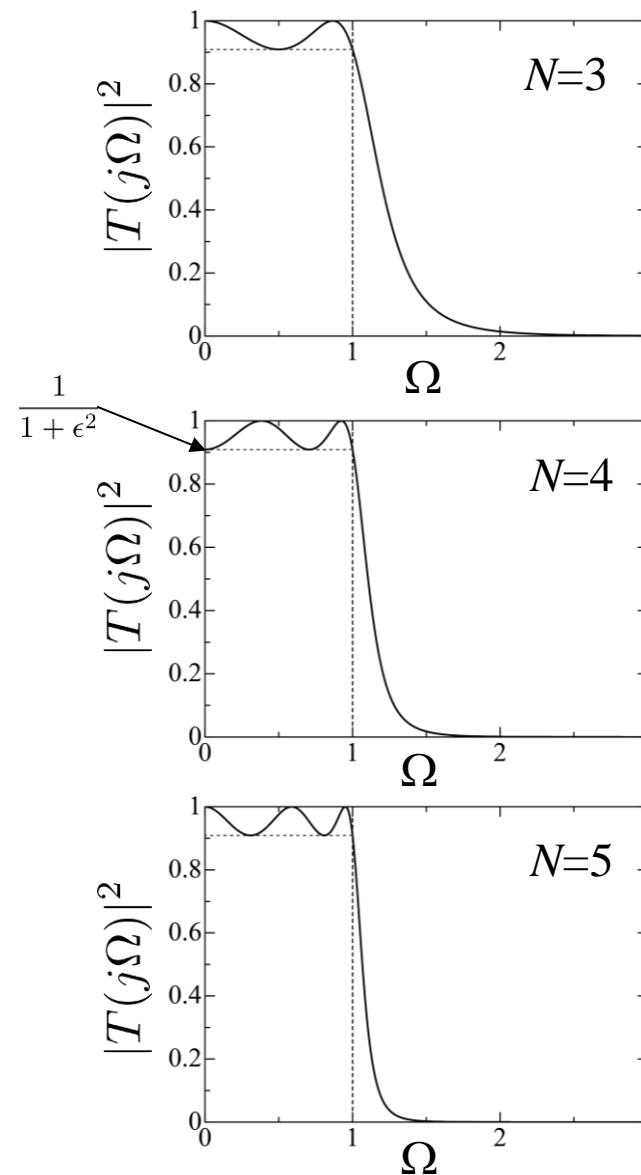
– ここで, T_N : チェビシェフ多項式

$$T_N(\Omega) = \cos(N \cos^{-1} \Omega)$$

$$\begin{cases} T_1(\Omega) = \Omega \\ T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1 \\ T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega \\ T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1 \\ \vdots \end{cases}$$

● 特徴

- $-1 \leq \Omega \leq 1$ (通過域):
 - 0 を中心に $N/2$ 回の振動を繰り返す (等リップル特性)
 - 負の規格化角周波数領域まで考えると, 反射零点の数は N
- $|\omega| \geq 1$ (阻止域):
 - $\cos^{-1} \Omega$ が虚数: $T_N(\Omega) = \cosh(N \cosh^{-1} \Omega)$
 - $N, \Omega \rightarrow \infty \Rightarrow T_N(\Omega) \rightarrow \infty$



【補足】 チェビシエフ特性の極の配置

■ 極

- 伝達関数の分母多項式=0 の解 $s_k = \sigma_k + j\omega_k$

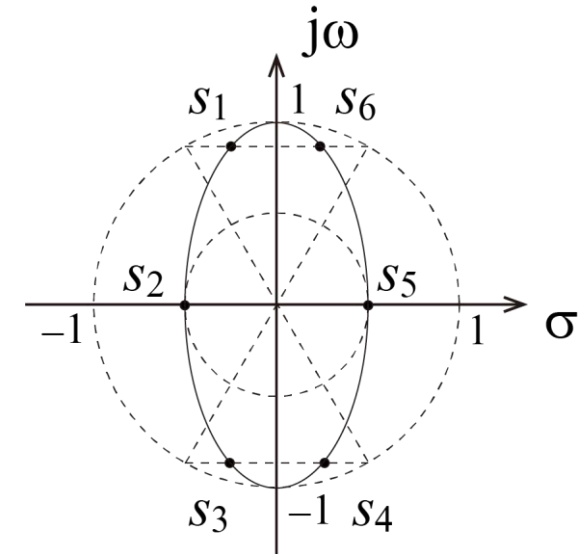
$$1 + \epsilon^2 T_N^2(-js) = 0$$

- 極 s_k が従う方程式

- 楕円方程式 $\frac{\sigma_k}{\sinh^2 q} + \frac{\omega_k}{\cosh^2 q} = 1$

ただし, $\cosh q = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}})$, $\sinh q = \pm \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}})$

$$a = \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{\epsilon}$$



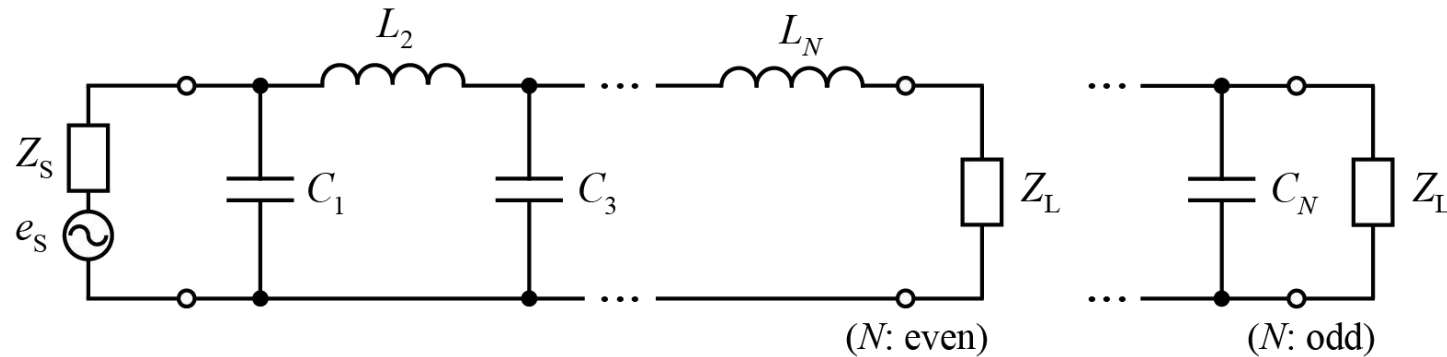
3次の場合

- バターワース関数との違いは極が楕円上にあるかどうかだけ

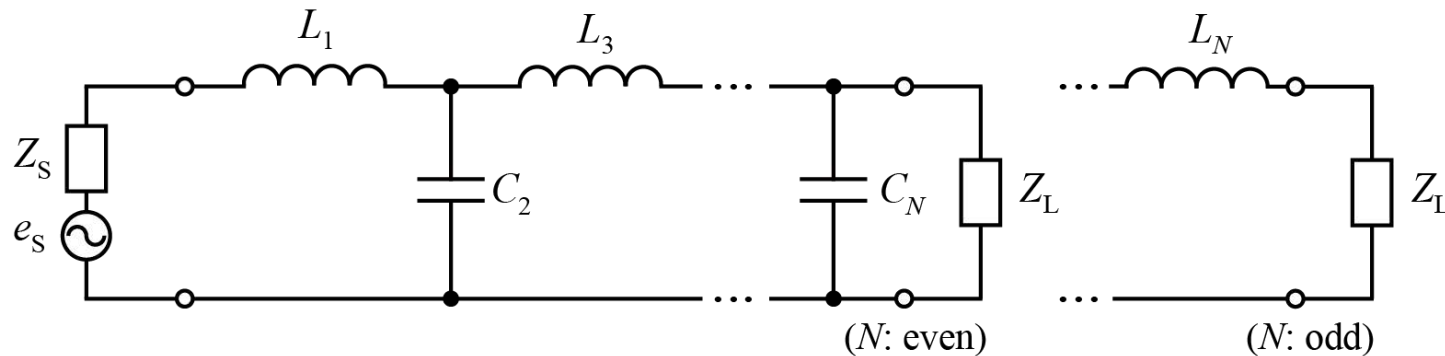
はしご型LPF

■ N 段はしご型LPF

- シヤント接続の C から始まる回路 (終端部も2通りある)



- シリーズ接続の L から始まる回路 (終端部も2通りある)

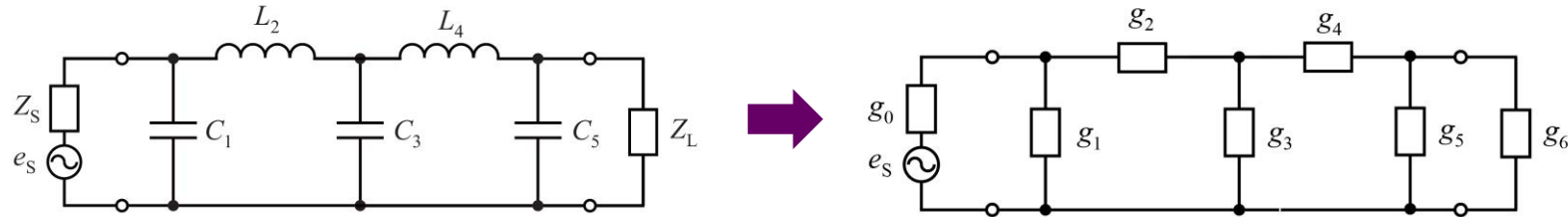


原型LPFの定義

■ 原型LPF (lowpass prototype filter) : 以下の2つで規格化

● 規格化素子値 g_i (g パラメータ)

- 回路素子値 L, C を電源の内部抵抗 $Z_s (=R_s)$ で規格化

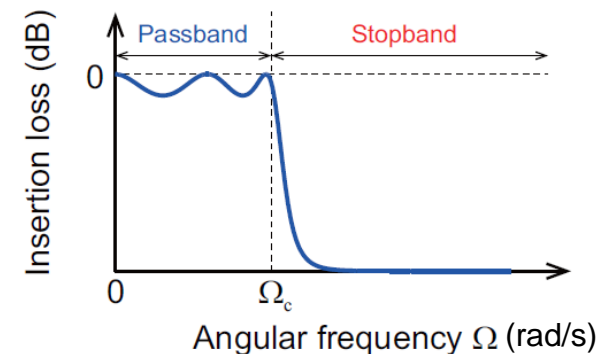


● 原型LPFの規格化角周波数 Ω

- 角周波数 ω を遮断角周波数 ω_c で規格化

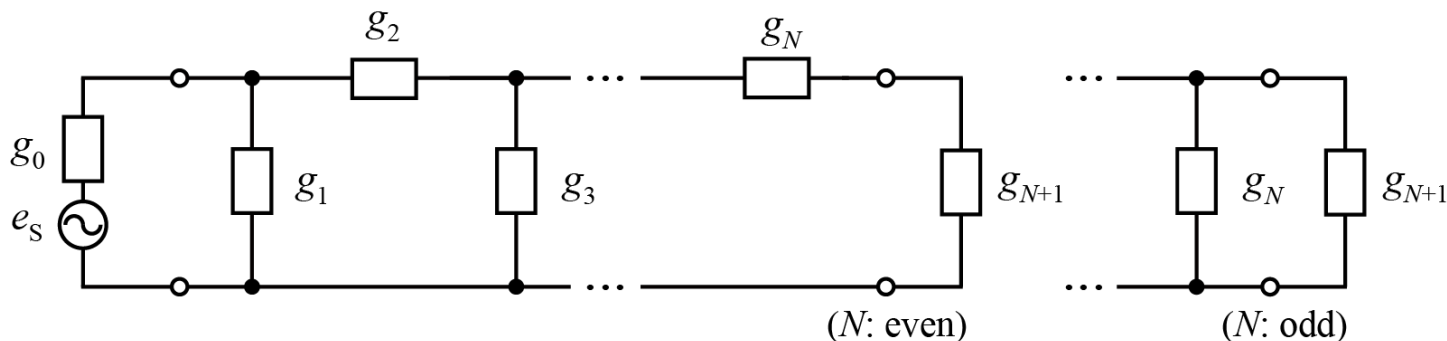
$$\Omega = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \Omega_c$$

Ω_c : 原型LPFの遮断角周波数 (通常, 1 rad/s)

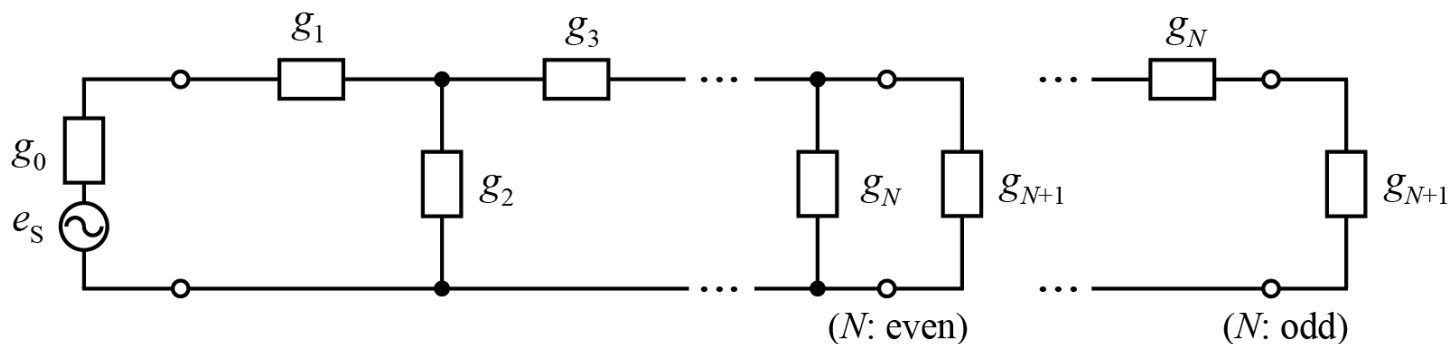


■ N 段原型LPF

● シヤント接続の C から始まる回路



● シリーズ接続の L から始まる回路



【補足】 原型LPFの回路合成

■ 回路合成手順

- ① 所望の電力透過特性 $|T(j\omega)|^2$ を与える.
- ② 電力反射特性 $|\Gamma(j\omega)|^2$ を求める.
- ③ $|\Gamma(s)|^2$ を因数分解する.
- ④ 分母がHurwitzの多項式となる $\Gamma(s)$ を作る.
- ⑤ 規格化入カインピーダンス $z_{in}(s)$ を求める.
- ⑥ 規格化入カインピーダンス $z_{in}(s)$ を連分数展開する.
- ⑦ ラダー型回路を構成する.

Hurwitz の多項式 $Q(s)$ の定義

- s について実係数の多項式 (LCR回路)
- 最高次数の係数は正
- $Q(s) = 0$ の解である零点は s の左半平面のみに存在 (極の安定性)

【補足】回路合成例 (1/2)

■ 例: 2段原型LPF(バターワース特性)

- ① 所望の電力透過特性 $|T(j\Omega)|^2$ を与える。
 $N=2$ の場合,

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^4}$$

- ② 電力反射特性 $|\Gamma(j\Omega)|^2$ を求める。

$$|\Gamma(j\Omega)|^2 = 1 - |T(j\Omega)|^2 = \frac{\Omega^4}{1 + \Omega^4}$$

- ③ $|\Gamma(s)|^2$ を因数分解する。

$$\begin{aligned} |\Gamma(s)|^2 &= \Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{s^4}{1 + s^4} \\ &= \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \frac{(-s)^2}{s^2 - \sqrt{2}s + 1} \end{aligned}$$

- ④ 分母がHurwitzの多項式となる $\Gamma(s)$ を作る。

$$\Gamma(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- ⑤ 規格化入カインピーダンス $z_{in}(s)$ を求める。

反射係数

$$\Gamma(s) = \pm \frac{z_{in}(s) - 1}{z_{in}(s) + 1}$$

規格化入カインピーダンス

$$z_{in1}(s) = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)}$$

$$z_{in2}(s) = \frac{1 - \Gamma(s)}{1 + \Gamma(s)}$$

【補足】回路合成例 (2/2)

⑥ 規格化入力インピーダンス $z_{in}(s)$ を連分数 (continued fraction) 展開する.

$$z_{in1}(s) = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2}s + 1}$$

↓ 連分数展開

$$z_{in1}(s) = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + \frac{1}{1}}$$

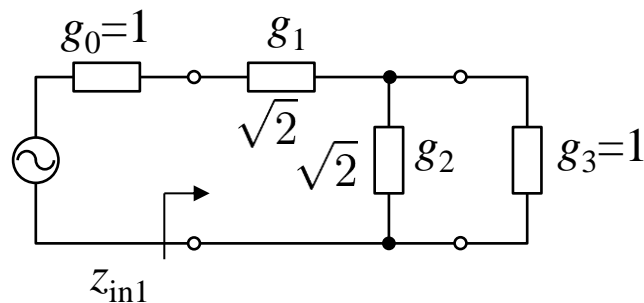
$$z_{in2}(s) = \frac{\sqrt{2}s + 1}{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

↓ 連分数展開

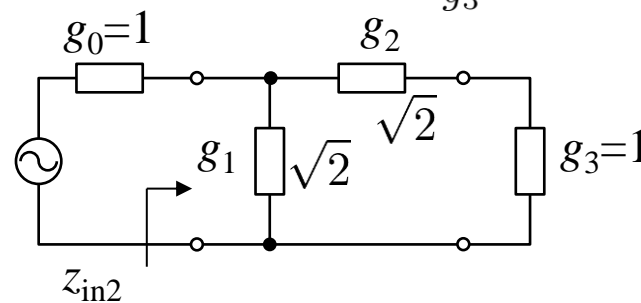
$$z_{in2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + \frac{1}{1}}}$$

⑦ ラダー型回路を構成する.

$$z_{in1}(s) = sg_0 + \frac{1}{sg_2 + \frac{1}{g_3}}$$



$$z_{in2}(s) = \frac{1}{sg_1 + \frac{1}{sg_2 + \frac{1}{g_3}}}$$



原型LPFの回路合成 (バターワース特性)

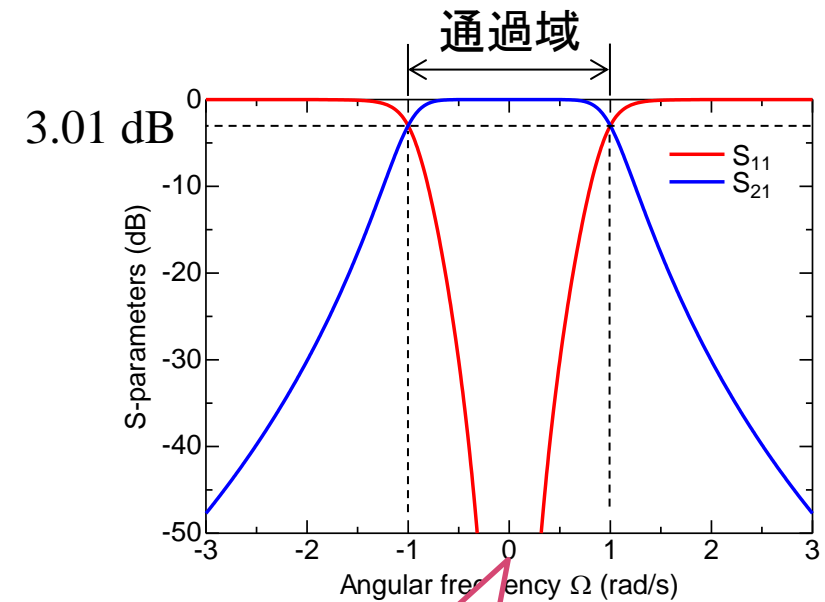
■ N 次バターワース特性 (最平坦特性) の場合

● g パラメータの設計公式

$$g_0 = 1.0$$

$$g_i = 2 \sin \left(\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right) \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

$$g_{N+1} = 1.0$$



5次のバターワース特性 (原型LPF)

規格化素子値 (バターワース特性)

■ バターワース特性の場合

- $g_0=1.0$, 挿入損失 $I_L=3.01$ dB at $\Omega_c=1$

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	2.0000	1.0								
2	1.4142	1.4142	1.0							
3	1.0000	2.0000	1.0000	1.0						
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1.0					
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180	1.0				
6	0.5176	1.4142	1.9318	1.9318	1.4142	0.5176	1.0			
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	1.0		
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9616	1.9616	1.6629	1.1111	0.3902	1.0	
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	1.0

原型LPFの回路合成 (チェビシェフ特性)

■ N 次チェビシェフ特性 (等リプル特性) の場合

● g パラメータの設計公式

$$g_0 = 1.0$$

$$g_1 = \frac{2}{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)$$

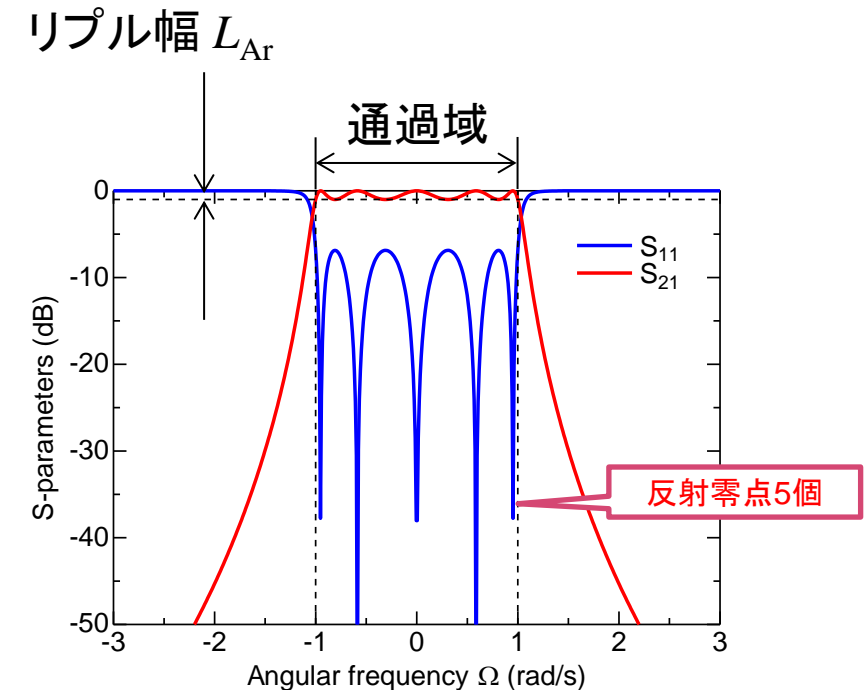
$$g_i = \frac{1}{g_{i-1}} \frac{4 \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{(2i-3)\pi}{2N}\right)}{\gamma^2 + \sin^2\left(\frac{(i-1)\pi}{N}\right)}$$

for $i = 2, 3, \dots, N$

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1.0 & \text{for } N \text{ odd} \\ \coth^2\left(\frac{\beta}{4}\right) & \text{for } N \text{ even} \end{cases}$$

$$\beta = \ln\left(\coth\frac{L_{Ar}}{17.37}\right)$$

$$\gamma = \sinh\left(\frac{\beta}{2N}\right)$$



5次のチェビシェフ特性 (原型LPF)

規格化素子値 (チェビシェフ特性)

■ チェビシェフ特性の場合

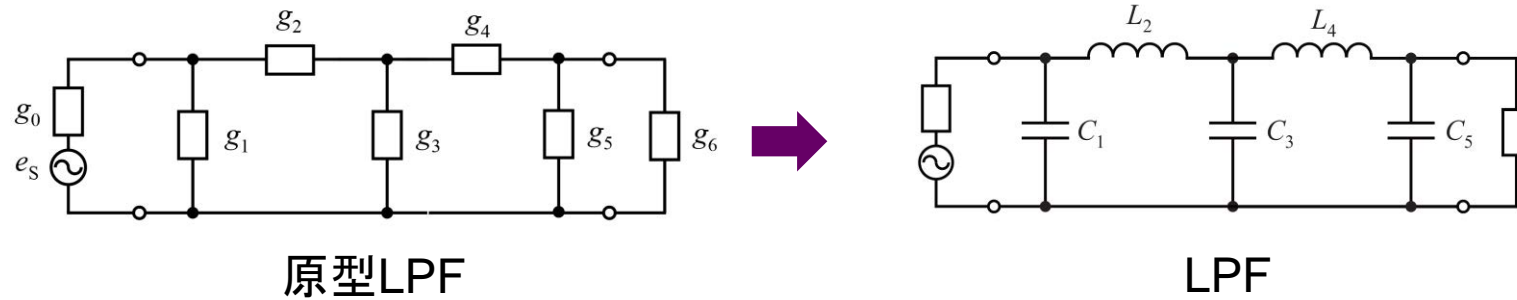
- $g_0=1.0$, 0.1 dB等リップル, $\Omega_c=1$

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	0.3052	1.0								
2	0.8431	0.6220	1.3554							
3	1.0316	1.1474	1.0316	1.0						
4	1.1088	1.3062	1.7704	0.8181	1.3554					
5	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468	1.0				
6	1.1681	1.4040	2.0562	1.5171	1.9029	0.8618	1.3554			
7	1.1812	1.4228	2.0967	1.5734	2.0967	1.4228	1.1812	1.0		
8	1.1898	1.4346	2.1199	1.6010	2.1700	1.5641	1.9445	0.8778	1.3554	
9	1.1957	1.4426	2.1346	1.6167	2.2054	1.6167	2.1346	1.4426	1.1957	1.0

原型LPFからLPFへの変換

■ 原型LPFからLPFへの変換

- 周波数変換 $\Omega = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Omega_c$ とインピーダンス変換 (次ページ)



- シリーズのL素子 g_i

$$j\Omega g_i \rightarrow j \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Omega_c \gamma_0 g_i = j\omega L_i \quad \rightarrow \quad L_i = \left(\frac{\Omega_c}{\omega_c}\right) \gamma_0 g_i$$

- シヤントのC素子 g_i

$$j\Omega g_i \rightarrow j \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Omega_c \frac{g_i}{\gamma_0} = j\omega C_i \quad \rightarrow \quad C_i = \left(\frac{\Omega_c}{\omega_c}\right) \frac{g_i}{\gamma_0}$$

インピーダンススケーリング

■ 前ページのスケーリングファクタ γ_0 の定義

- 電源の内部抵抗を R_0 とすると,

$$\gamma_0 = \begin{cases} \frac{R_0}{g_0} & g_0 : \text{抵抗の場合} \\ R_0 g_0 & g_0 : \text{コンダクタンスの場合} \end{cases}$$

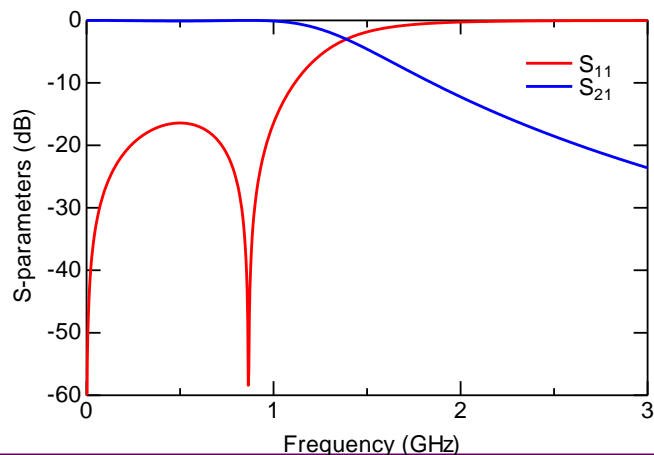
■ インピーダンススケーリング

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \gamma_0 R & G &\rightarrow \frac{G}{\gamma_0} \\ L &\rightarrow \gamma_0 L & C &\rightarrow \frac{C}{\gamma_0} \end{aligned}$$

原型LPFからの周波数変換

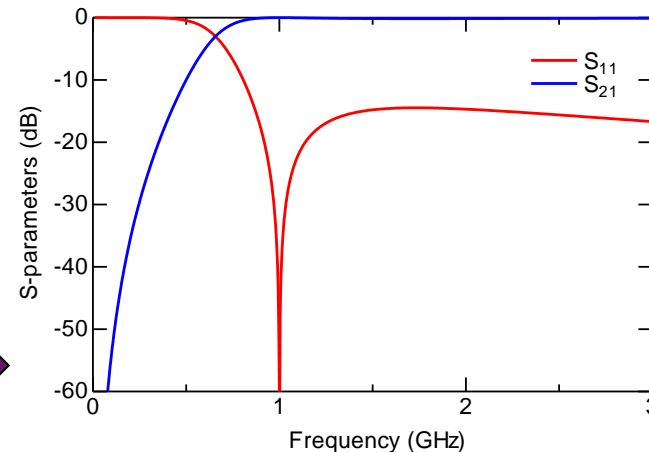
① LPF

$$\Omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \Omega_c$$

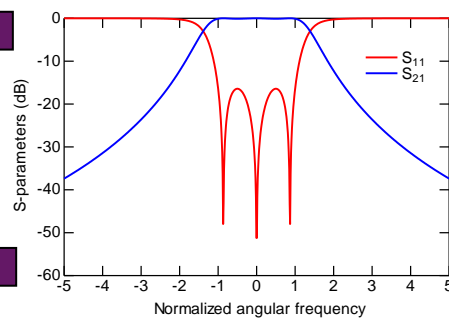


② HPF

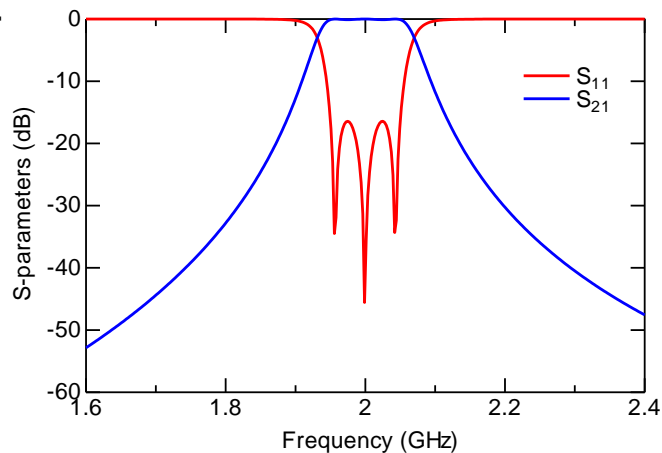
$$\Omega \rightarrow -\frac{\omega_c}{\omega} \Omega_c$$



原型LPF
(無極特性)

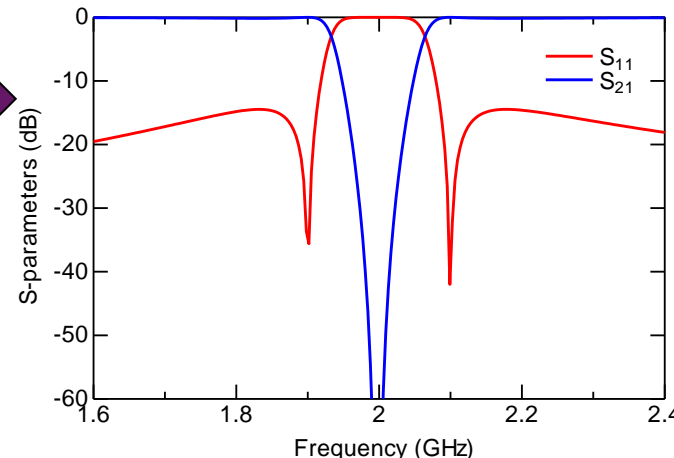


③ BPF



$$\Omega \rightarrow \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Omega_c$$

④ BSF



$$\Omega \rightarrow -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \Omega_c$$

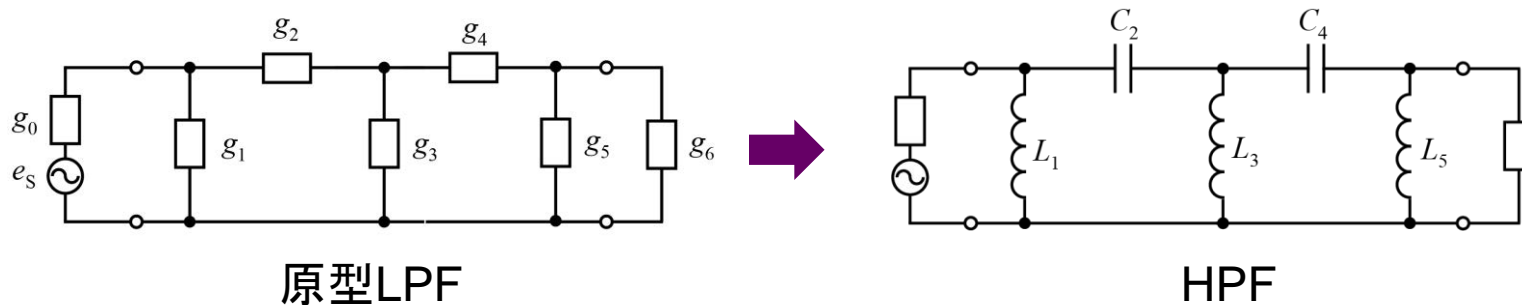
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

【補足】 原型LPFからHPFへの変換

■ 原型LPFからHPFへの変換

- 周波数変換とインピーダンス変換



- シリーズのC素子 g_i

$$j\Omega g_i \rightarrow j \left(-\frac{\omega_c}{\omega} \right) \Omega_c \gamma_0 g_i = \frac{1}{j\omega C_i} \quad \rightarrow$$

$$C_i = \frac{1}{\omega_c \Omega_c} \frac{1}{\gamma_0 g_i}$$

- シヤントのL素子 g_i

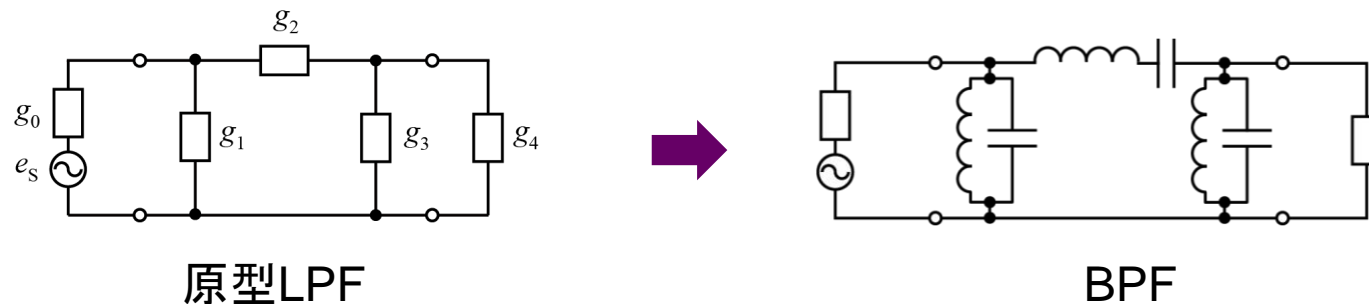
$$j\Omega g_i \rightarrow j \left(-\frac{\omega_c}{\omega} \right) \Omega_c \frac{g_i}{\gamma_0} = \frac{1}{j\omega L_i} \quad \rightarrow$$

$$L_i = \frac{1}{\omega_c \Omega_c} \frac{\gamma_0}{g_i}$$

【補足】 原型LPFからBPFへの変換

■ 原型LPFからBPFへの変換

● 周波数変換とインピーダンス変換



- シリーズのL素子 $g_i \rightarrow LC$ 直列共振回路

$$j\Omega g_i \rightarrow j \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Omega_c \gamma_0 g_i = j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i} \rightarrow$$

$$L_i = \frac{\Omega_c}{\Delta\omega} \gamma_0 g_i$$

$$C_i = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \Omega_c} \frac{1}{\gamma_0 g_i}$$

- シヤントのC素子 $g_i \rightarrow LC$ 並列共振回路

$$j\Omega g_i \rightarrow j \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Omega_c \frac{g_i}{\gamma_0} = j\omega C_i + \frac{1}{j\omega L_i} \rightarrow$$

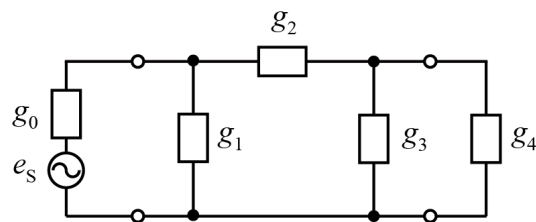
$$C_i = \frac{\Omega_c}{\Delta\omega} \frac{g_i}{\gamma_0}$$

$$L_i = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \Omega_c} \frac{\gamma_0}{g_i}$$

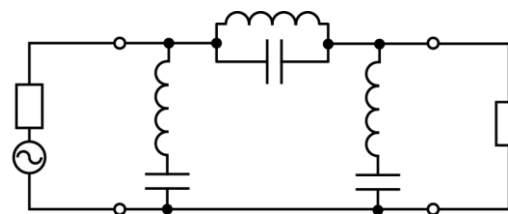
【補足】 原型LPFからBSFへの変換

■ 原型LPFからBSFへの変換

- 周波数変換とインピーダンス変換



原型LPF



BSF

- シリーズのL素子 $g_i \rightarrow LC$ 並列共振回路

$$j\Omega g_i \rightarrow -j \frac{1}{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \Omega_c \gamma_0 g_i = \frac{1}{j\omega C_i + \frac{1}{j\omega L_i}} \rightarrow$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta\omega \Omega_c} \frac{1}{\gamma_0 g_i}$$

$$L_i = \frac{\Delta\omega \Omega_c}{\omega_0^2} \gamma_0 g_i$$

- シヤントのC素子 $g_i \rightarrow LC$ 直列共振回路

$$j\Omega g_i \rightarrow -j \frac{1}{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \Omega_c \frac{g_i}{\gamma_0} = \frac{1}{j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i}} \rightarrow$$

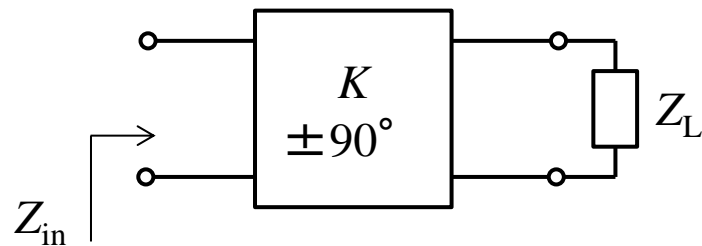
$$L_i = \frac{1}{\Delta\omega \Omega_c} \frac{\gamma_0}{g_i}$$

$$C_i = \frac{\Delta\omega \Omega_c}{\omega_0^2} \frac{g_i}{\gamma_0}$$

インバータ (反転器)

■ イミタンスインバータ

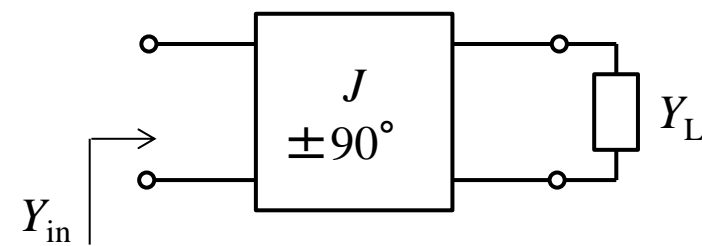
- 負荷インピーダンス／負荷アドミタンスの逆数を形成する回路
 - インピーダンスインバータ(Kインバータ)
 - アドミタンスインバータ(Jインバータ)
- ラダー型回路は集中定数 → 共振器間の結合を表すためにインバータが必要



入力インピーダンス

$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L}$$

$K (\Omega)$: インバータパラメータ



入力アドミタンス

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L}$$

$J (S)$: インバータパラメータ

Kインバータ・Jインバータ

■ インバータの理想的なABCD行列

Kインバータ

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp jK \\ \pm \frac{1}{jK} & 0 \end{bmatrix}$$

Jインバータ

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm \frac{1}{jJ} \\ \mp jJ & 0 \end{bmatrix}$$

● 導出 (Kインバータ)

- 電気長 θ , 特性インピーダンス Z_0 の伝送線路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ j\frac{1}{Z_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- 入力インピーダンス Z_{in}

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{Z_L A + B}{Z_L C + D} = \frac{K^2}{Z_L}$$

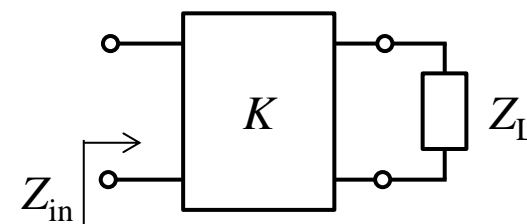
- 条件:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, K = Z_0$$

Kインバータ

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, J = Y_0$$

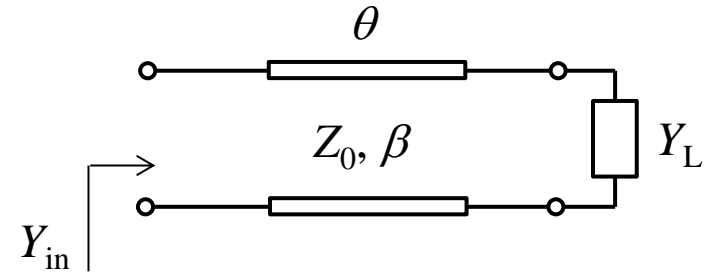
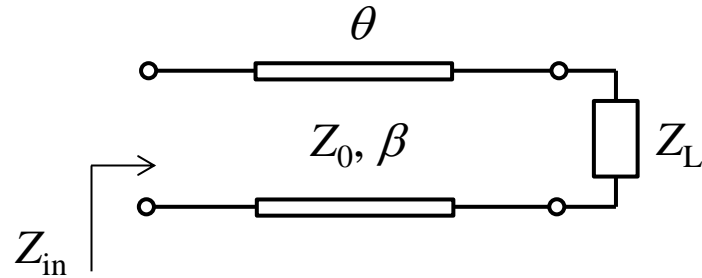
Jインバータ



狭帯域近似

インバータの実現方法の一例

■ 例) 1/4波長伝送線路



● 導出

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{in}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}{Z_0 + jZ_L \tan\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)} \\
 &= \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad \text{狭帯域近似}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{in}} &= Y_0 \frac{Y_L + jY_0 \tan\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}{Y_0 + jY_L \tan\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)} \\
 &= \frac{Y_0^2}{Y_L} \quad \text{狭帯域近似}
 \end{aligned}$$

- ただし、理想インバータとして動作するのは、特定の周波数1点のみ

Kインバータを用いた原型LPF (1/4)

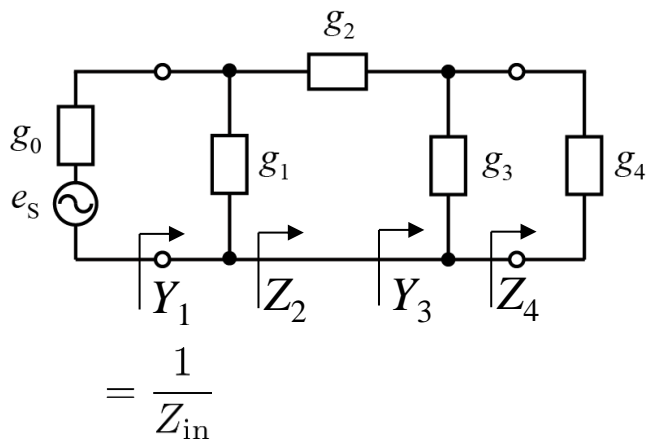
■ラダー型回路 → Kインバータ型回路

● 両回路の入カインピーダンス

- 連分数展開が可能

● 例

- ラダー型の3段原型LPF (g_1 がC素子)



$$Z_4 = g_4$$

$$Y_3 = sg_3 + \frac{1}{Z_4} = sg_3 + \frac{1}{g_4}$$

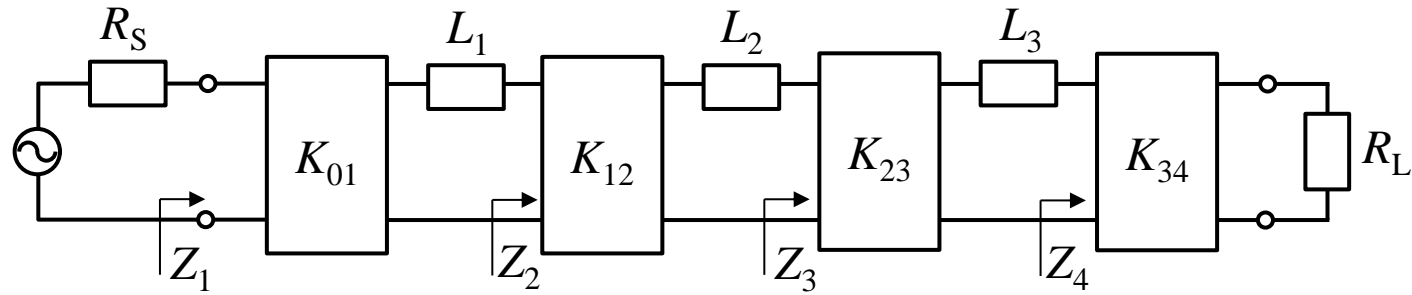
$$Z_2 = sg_2 + \frac{1}{Y_3} = sg_2 + \frac{1}{sg_3 + \frac{1}{g_4}}$$

$$Y_1 = sg_1 + \frac{1}{Z_2} = sg_1 + \frac{1}{sg_2 + \frac{1}{sg_3 + \frac{1}{g_4}}}$$

Kインバータを用いた原型LPF (2/4)

● 例(続き):

- Kインバータを用いた3段原型LPF



$$Z_4 = \frac{K_{34}^2}{R_L}$$

$$Z_3 = \frac{K_{23}^2}{sL_3 + Z_4} = \frac{K_{23}^2}{sL_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{K_{34}^2}}} = \frac{1}{s\frac{L_3}{K_{23}^2} + \frac{1}{K_{23}^2 R_L}}$$

$$Z_2 = \frac{K_{12}^2}{sL_2 + Z_3} = \frac{K_{12}^2}{sL_2 + \frac{1}{s\frac{L_3}{K_{23}^2} + \frac{1}{K_{23}^2 R_L}}} = \frac{1}{s\frac{L_2}{K_{12}^2} + \frac{1}{s\frac{K_{12}^2 L_3}{K_{23}^2} + \frac{1}{K_{12}^2 K_{23}^2 R_L}}}$$

$$Z_1 = \frac{K_{01}^2}{sL_1 + Z_2} = \frac{K_{01}^2}{sL_1 + \frac{1}{s\frac{L_2}{K_{12}^2} + \frac{1}{s\frac{K_{12}^2 L_3}{K_{23}^2} + \frac{1}{K_{12}^2 K_{23}^2 R_L}}}} = \frac{1}{s\frac{L_1}{K_{01}^2} + \frac{1}{s\frac{K_{01}^2 L_2}{K_{12}^2} + \frac{1}{s\frac{K_{01}^2 K_{12}^2 L_3}{K_{23}^2} + \frac{1}{K_{01}^2 K_{12}^2 K_{23}^2 R_L}}}} = \frac{1}{sg_1 + \frac{1}{sg_2 + \frac{1}{sg_3 + \frac{1}{g_4}}}}$$

Kインバータを用いた原型LPF (3/4)

(続き)

- 規格化入力インピーダンスの比較

- ラダー型

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{g_0} = \frac{1}{s \boxed{g_0 g_1} + \frac{1}{s \frac{g_2}{g_0} + \frac{1}{s \boxed{g_0 g_3} + \frac{1}{\boxed{\frac{g_4}{g_0}}}}}}$$

- Kインバータ型

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{R_S} = \frac{1}{s \boxed{\frac{R_S L_1}{K_{01}^2}} + \frac{1}{s \boxed{\frac{K_{01}^2 L_2}{R_S K_{12}^2}} + \frac{1}{s \boxed{\frac{R_S K_{12}^2 L_3}{K_{01}^2 K_{23}^2}} + \frac{1}{\boxed{\frac{K_{01}^2 K_{23}^2 R_L}{R_S K_{12}^2 K_{34}^2}}}}}}$$

Kインバータを用いた原型LPF (4/4)

(続き)

- Kインバータパラメータの導出結果 ($N=3$)

$$K_{01} = \sqrt{\frac{R_S L_1}{g_0 g_1}}$$

$$K_{12} = \sqrt{\frac{K_{01}^2 L_2 g_0}{R_S g_2}} = \sqrt{\frac{L_1 L_2}{g_1 g_2}}$$

$$K_{23} = \sqrt{\frac{R_S K_{12}^2 L_3}{K_{01}^2 g_0 g_3}} = \sqrt{R_S \frac{g_0 g_1}{R_S L_1} \frac{L_1 L_2}{g_1 g_2} \frac{L_3}{g_0 g_3}} = \sqrt{\frac{L_2 L_3}{g_2 g_3}}$$

$$K_{34} = \sqrt{\frac{K_{01}^2 K_{23}^2 R_L g_0}{R_S K_{12}^2 g_4}} = \sqrt{\frac{R_S L_1}{g_0 g_1} \frac{L_2 L_3}{g_2 g_3} \frac{g_1 g_2}{L_1 L_2} \frac{R_L g_0}{R_S g_4}} = \sqrt{\frac{L_3 R_S}{g_3 g_4}}$$

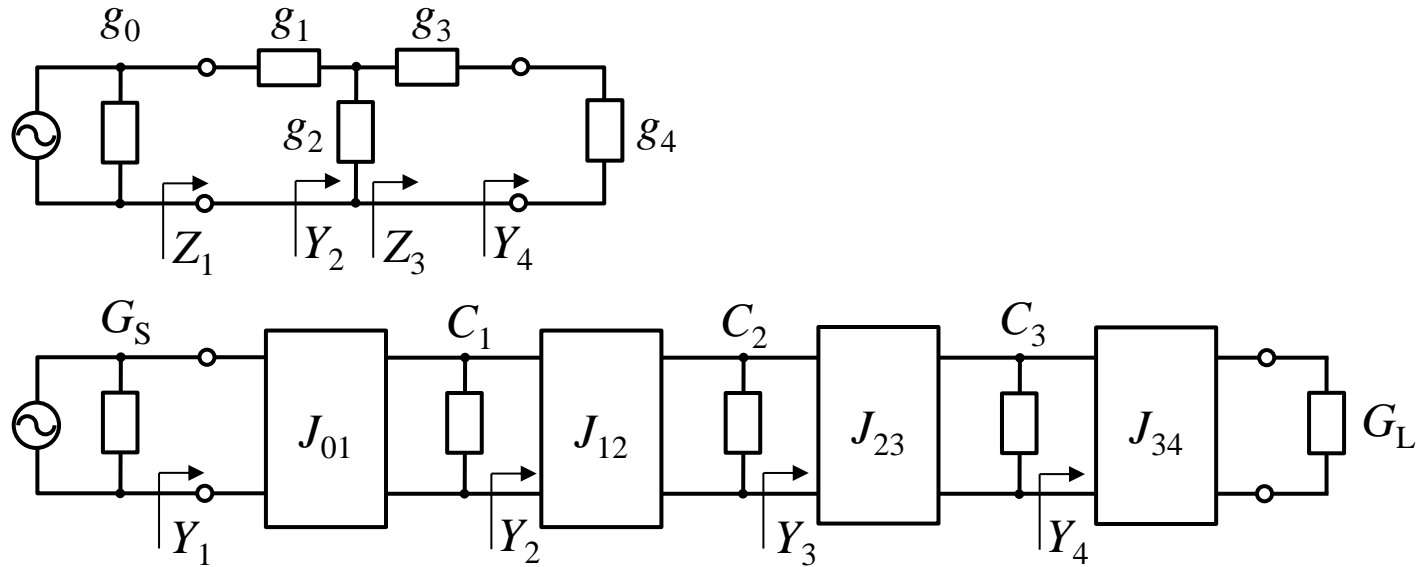
- N 段に一般化

$$K_{01} = \sqrt{\frac{R_S L_1}{g_0 g_1}}, \quad K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L_i L_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L_N R_L}{g_N g_{N+1}}}$$

– $R_S, R_L, L_i (i=1, 2, \dots, N)$ は任意の値をとることができる。

Jインバータを用いた原型LPF

■ラダー型回路 → Jインバータ型回路



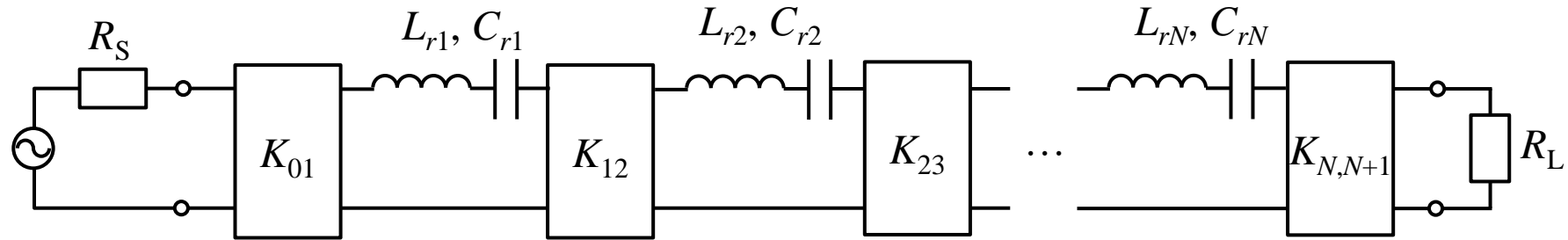
● Jインバータパラメータ (導出方法はKインバータと同じ)

$$J_{01} = \sqrt{\frac{G_S C_1}{g_0 g_1}}, \quad J_{i,i+1} = \sqrt{\frac{C_i C_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{C_N G_L}{g_N g_{N+1}}}$$

– $G_S, G_L, C_i (i=1, 2, \dots, N)$ は任意の値をとることができる。

Kインバータを用いたBPF

■ ラダー型回路 → Kインバータを用いたBPF



● N段BPFのKインバータパラメータ(導出方法は同じ)

$$K_{01} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{R_S \cdot \omega_0 L_{r1}}{g_0 g_1}}$$

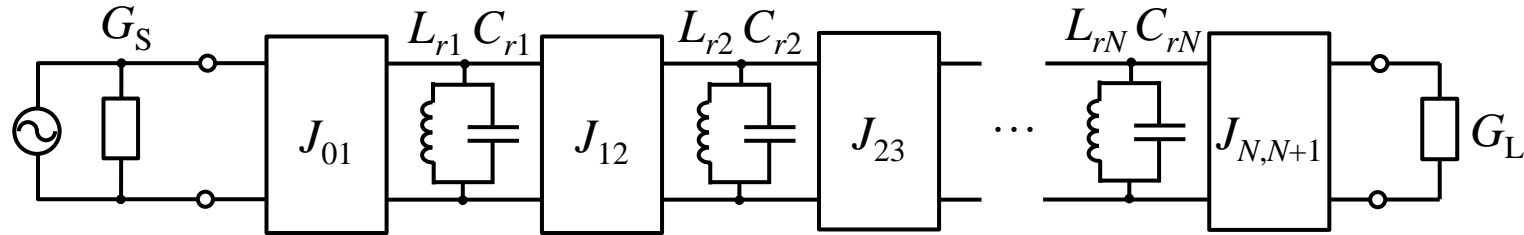
$$K_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \sqrt{\frac{\omega_0 L_{ri} \cdot \omega_0 L_{r,i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_{ri} C_{ri}} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{\omega_0 L_{rN} R_L}{g_N g_{N+1}}}$$

- ただし, $R_S, R_L, L_{ri} (i=1, 2, \dots, N)$ は任意の値をとることができる。
(通常, L_{ri} にのみ自由度がある)

Jインバータを用いたBPF

■ ラダー型回路 → Jインバータを用いたBPF



● N段BPFのJインバータパラメータ(導出方法は同じ)

$$\begin{aligned}
 J_{01} &= \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{G_S \cdot \omega_0 C_{r1}}{g_0 g_1}} \\
 J_{i,i+1} &= \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \sqrt{\frac{\omega_0 C_{ri} \cdot \omega_0 C_{r,i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) & \omega_0^2 &= \frac{1}{L_{ri} C_{ri}} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 J_{N,N+1} &= \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{\omega_0 C_{rN} G_L}{g_N g_{N+1}}}
 \end{aligned}$$

- ただし, G_S , G_L , C_{ri} ($i=1, 2, \dots, N$)は任意の値をとることができる.
(通常, C_{ri} にのみ自由度がある)

スロープパラメータの導入

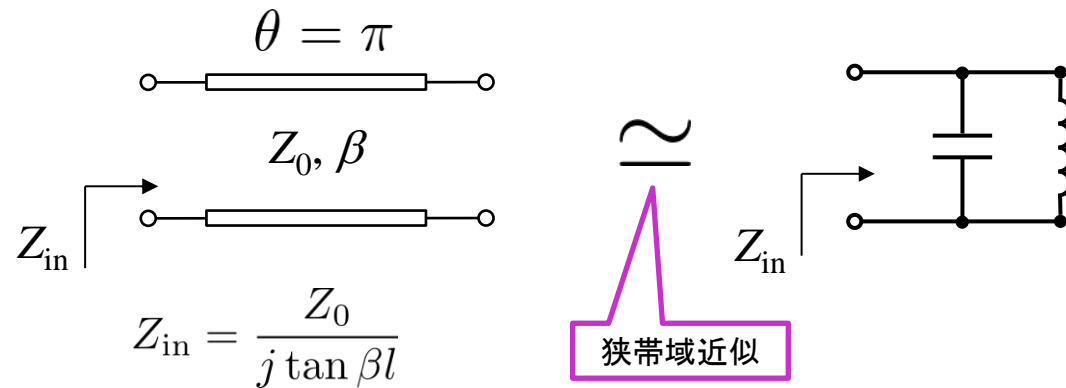
■ LC共振回路のL値, C値の決定方法

● 設計時

- 中心角周波数 ω_0 , 比帯域幅FBW, 内部抵抗 R_S , 負荷抵抗 R_L は与える.
- LC共振回路のL値またC値には自由度がある.
- マイクロ波共振器とLC共振回路が同じ共振特性を持つように設計

● 例

- LC共振回路は半波長伝送線路(=共振器)で実現可能



リアクタンススロープパラメータ

■ LC直列共振回路のL値の決定方法

● LC直列共振回路のリアクタンス

$$jX_i = j\omega L_{ri} + \frac{1}{j\omega C_{ri}}$$

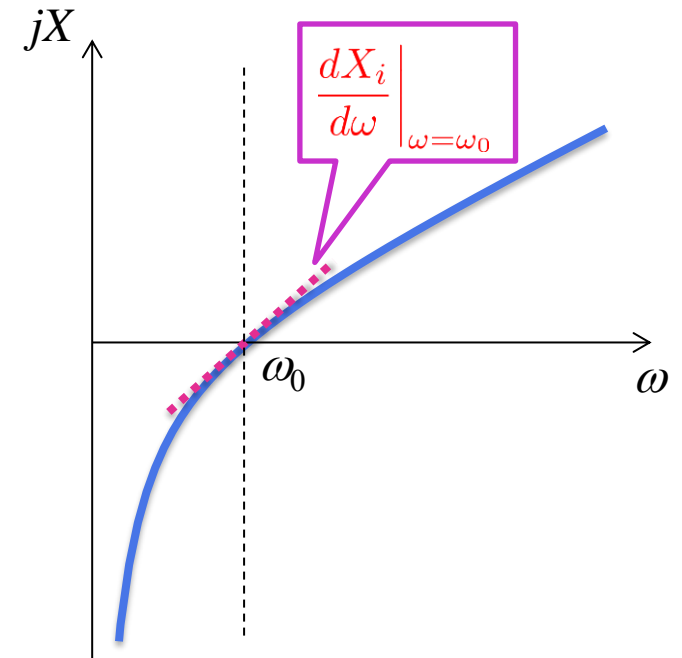
- $\omega = \omega_0$ における X の傾き

$$\left. \frac{dX_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = L_{ri} + \frac{1}{\omega_0^2 C_{ri}} = 2L_{ri}$$

狭帯域近似

- リアクタンススロープパラメータ x_i の定義

$$x_i = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dX_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L_{ri}$$



リアクタンスカーブと共振角周波数におけるスロープの関係

サセプタンススロープパラメータ

■ LC並列共振回路のC値の決定方法

● LC直列共振回路のリアクタンス

$$jB_i = j\omega C_{ri} + \frac{1}{j\omega L_{ri}}$$

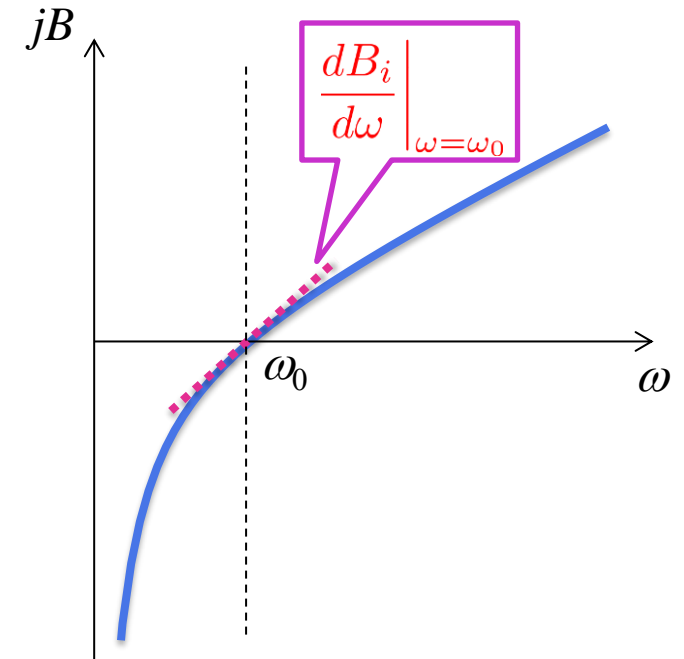
- $\omega = \omega_0$ における X の傾き

$$\left. \frac{dB_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = C_{ri} + \frac{1}{\omega_0^2 L_{ri}} = 2C_{ri}$$

狭帯域近似

- サセプタンススロープパラメータ b_i の定義

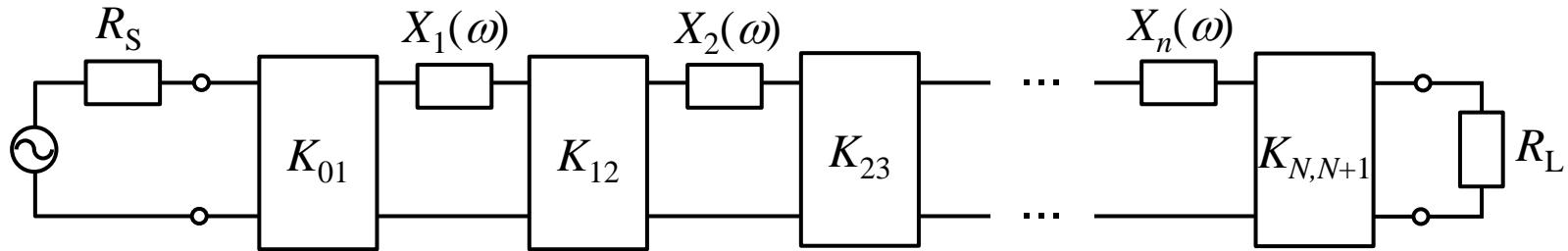
$$b_i = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dB_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 C_{ri}$$



サセプタンスカーブと共振角周波数におけるスロープの関係

Kインバータを用いて一般化したBPF

■ Kインバータを用いたBPF



リアクタンス

$$X_i(\omega) = \omega L_{ri} - \frac{1}{\omega C_{ri}}$$

リアクタンススロープパラメータ

$$x_i = \left. \frac{\omega_0}{2} \frac{dX_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L_{ri}$$

Kインバータパラメータ

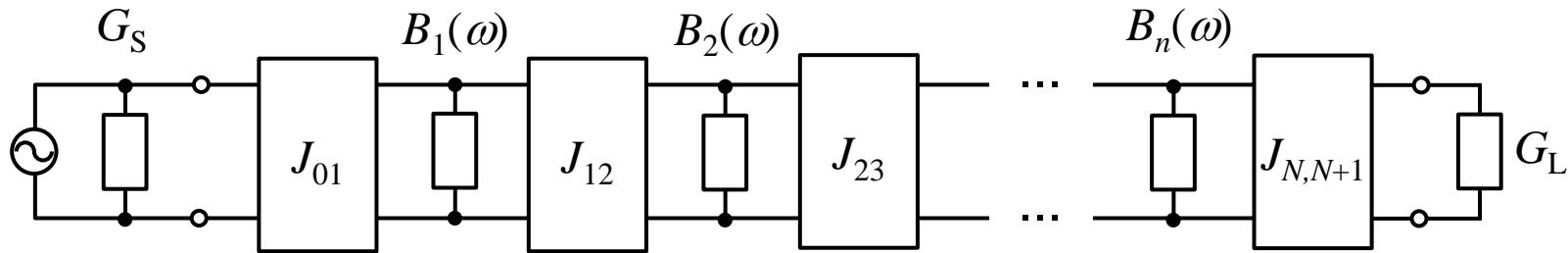
$$K_{01} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{R_S x_1}{g_0 g_1}}$$

$$K_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \sqrt{\frac{x_i x_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{x_N R_L}{\Omega_c g_N g_{N+1}}}$$

Jインバータを用いて一般化したBPF

■ Jインバータを用いたBPF



サセプタンス

$$B_i(\omega) = \omega C_{ri} - \frac{1}{\omega L_{ri}}$$

サセプタンススロープパラメータ

$$b_i = \left. \frac{\omega_0}{2} \frac{dB_i}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 C_{ri}$$

Jインバータパラメータ

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{G_S b_1}{g_0 g_1}}$$

$$J_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \sqrt{\frac{b_i b_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

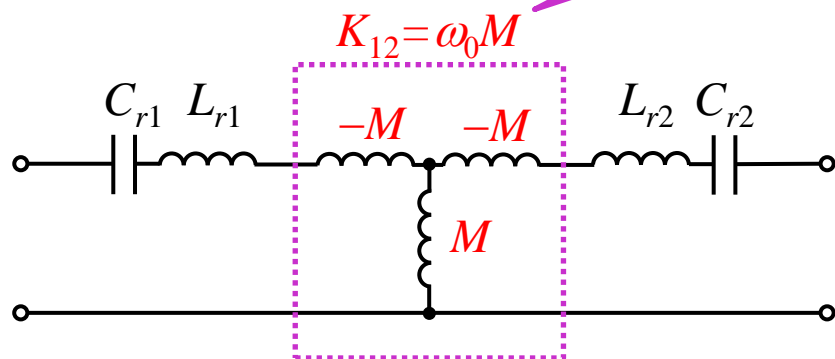
$$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{b_N G_L}{g_N g_{N+1}}}$$

共振器間の結合係数

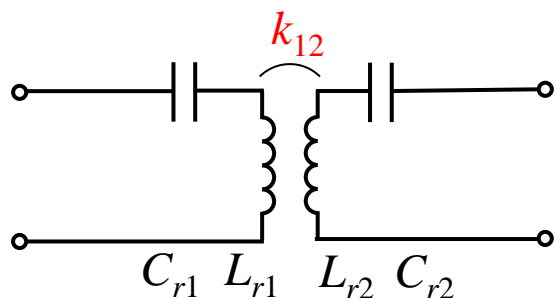
■ 結合の表現方法

● Kインバータ K_{12}

狭帯域近似



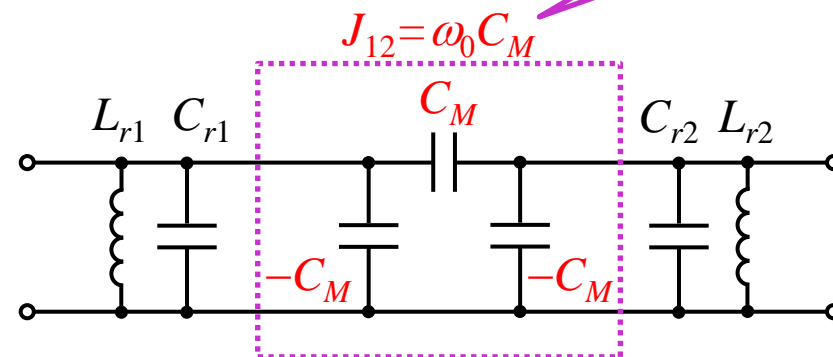
● 結合係数 k_{12}



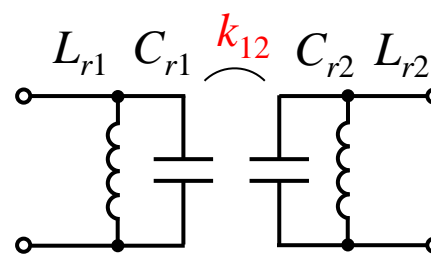
$$\begin{aligned}
 k_{12} &= \frac{M}{\sqrt{L_{r1}L_{r2}}} \\
 &= \frac{\omega_0 M}{\sqrt{\omega_0 L_{r1} \cdot \omega_0 L_{r2}}} \\
 &= \frac{K_{12}}{\sqrt{\omega_0 L_{r1} \cdot \omega_0 L_{r2}}} \\
 &= \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}}
 \end{aligned}$$

● Jインバータ J_{12}

狭帯域近似



● 結合係数 k_{12}

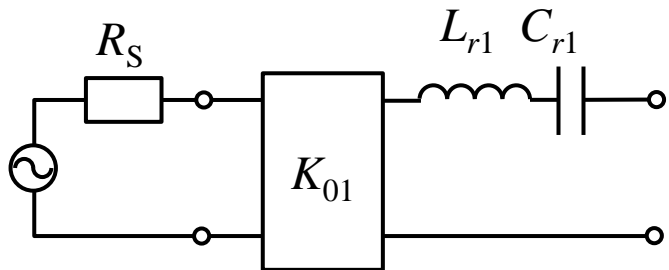


$$\begin{aligned}
 k_{12} &= \frac{C_M}{\sqrt{C_{r1}C_{r2}}} \\
 &= \frac{\omega_0 C_M}{\sqrt{\omega_0 C_{r1} \cdot \omega_0 C_{r2}}} \\
 &= \frac{J_{12}}{\sqrt{\omega_0 C_{r1} \cdot \omega_0 C_{r2}}} \\
 &= \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}}
 \end{aligned}$$

外部回路（電源内部抵抗／負荷抵抗）との結合

■ 外部回路（電源）との結合の表現方法（負荷側も同じ）

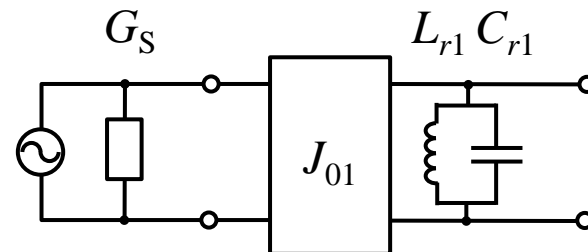
● Kインバータ K_{01}



● 外部Q値 Q_e

$$\begin{aligned}
 Q_e &= \frac{\omega_0 L_{r1}}{K_{01}^2 / R_S} \\
 &= \frac{\omega_0 L_{r1} R_S}{K_{01}^2} \\
 &= \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_0 g_1
 \end{aligned}$$

● Jインバータ J_{01}



● 外部Q値 Q_e

$$\begin{aligned}
 Q_e &= \frac{\omega_0 C_{r1}}{K_{01}^2 / G_S} \\
 &= \frac{\omega_0 C_{r1} G_S}{J_{01}^2} \\
 &= \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_0 g_1
 \end{aligned}$$

結合共振器を用いたBPF

■ 結合共振器を用いたBPF

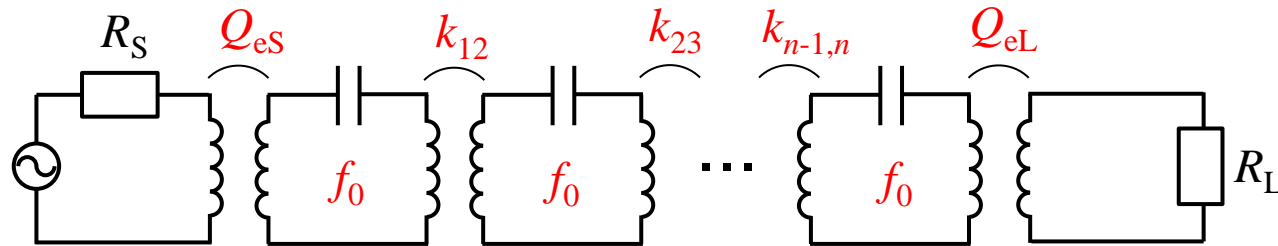
外部Q値(入力側)

結合係数

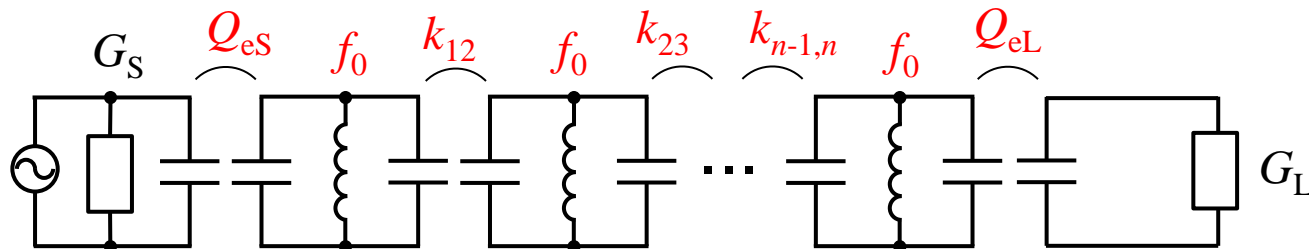
外部Q値(出力側)

$$Q_{eS} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_0 g_1, \quad k_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad Q_{eL} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_N g_{N+1}$$

● LC直列共振器の場合



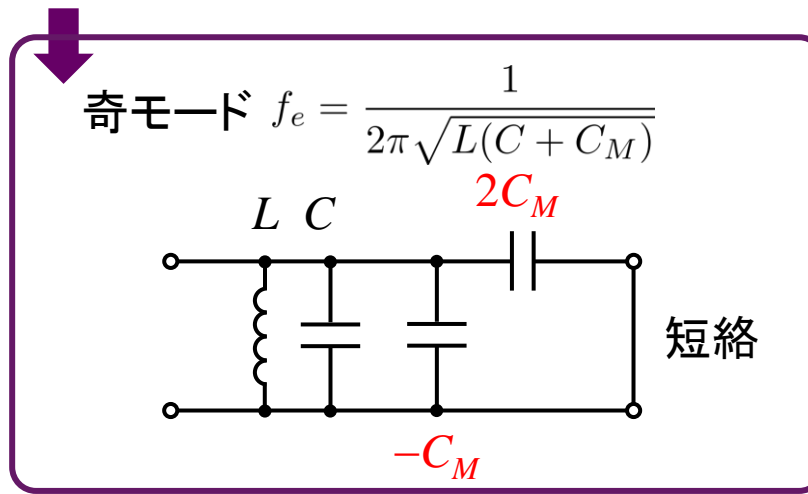
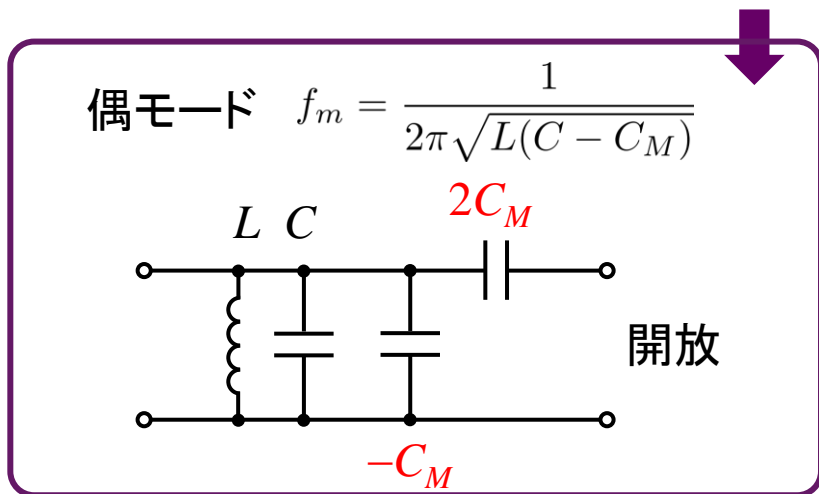
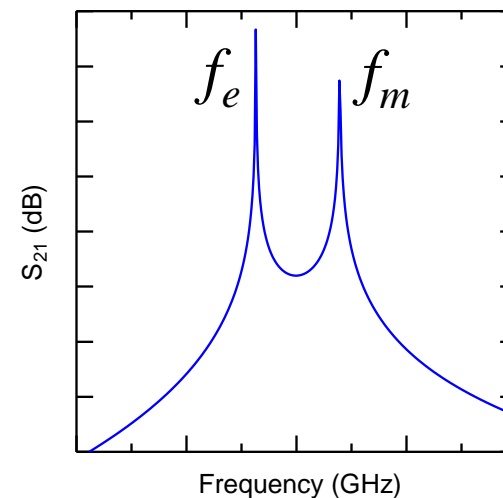
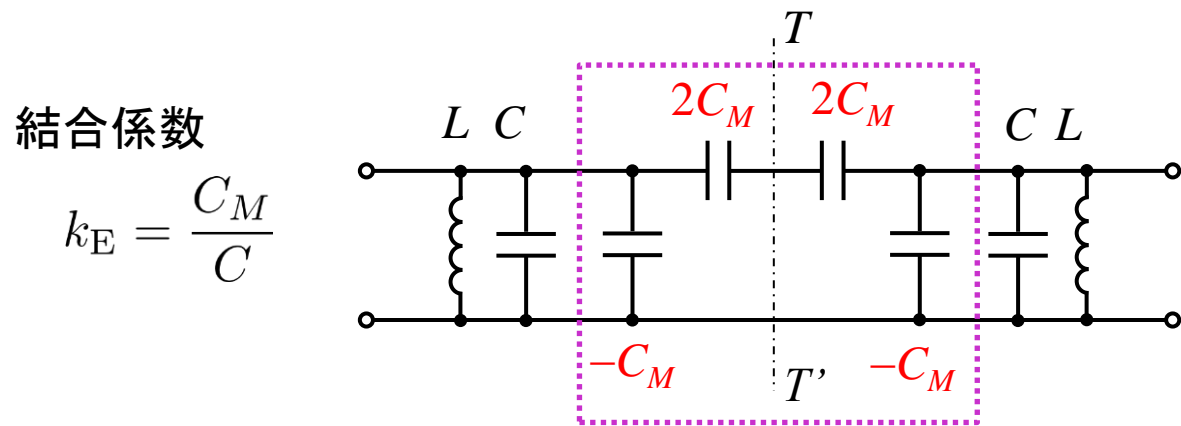
● LC並列共振器の場合



【補足】結合係数の評価：電界結合のみの場合

■ 電界結合 (C結合, 容量性結合)

● 偶奇モード解析 (同調共振器の場合)

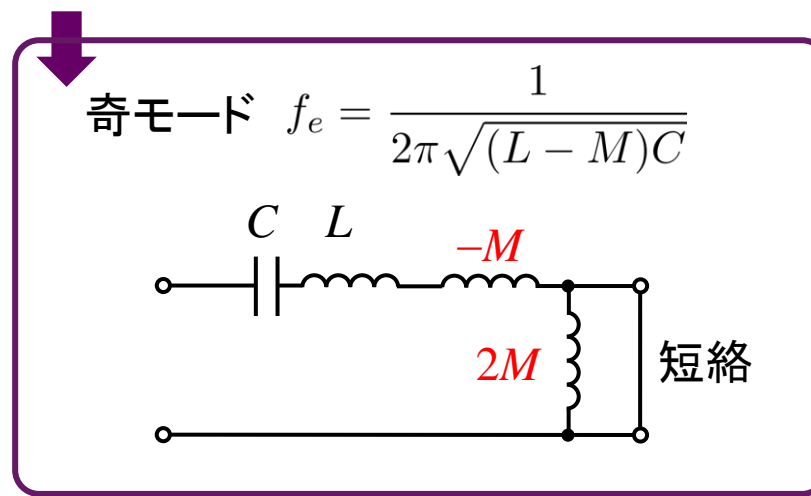
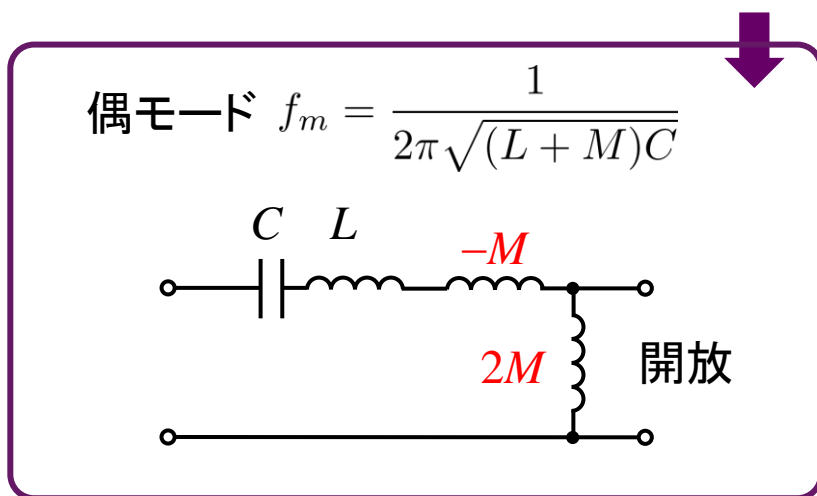
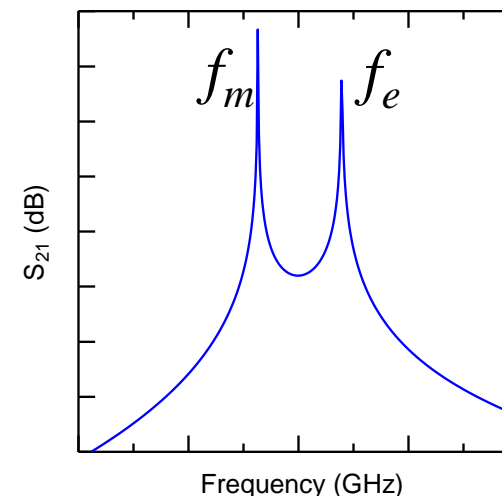
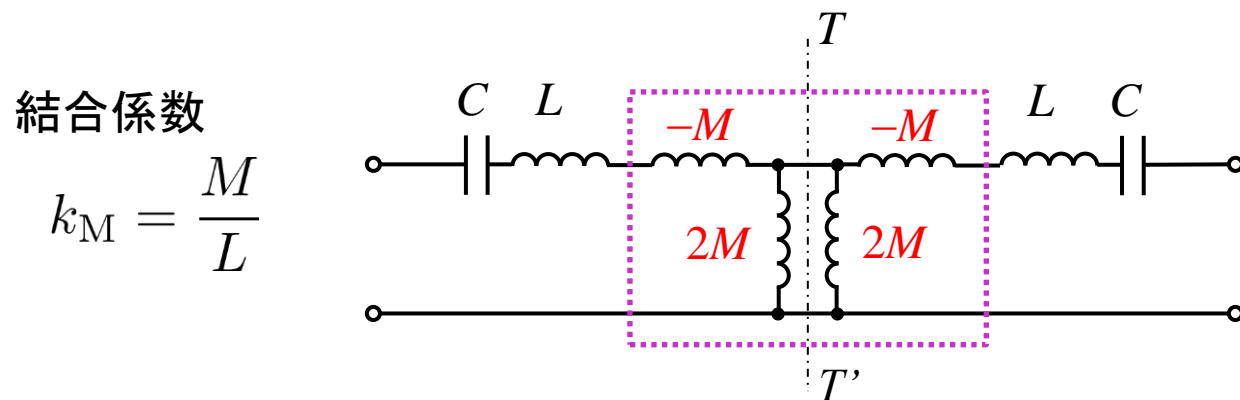


$$k_E = \frac{f_m^2 - f_e^2}{f_m^2 + f_e^2} = \frac{C_M}{C}$$

【補足】結合係数の評価：磁界結合のみの場合

■ 磁界結合 (L結合, 誘導性結合)

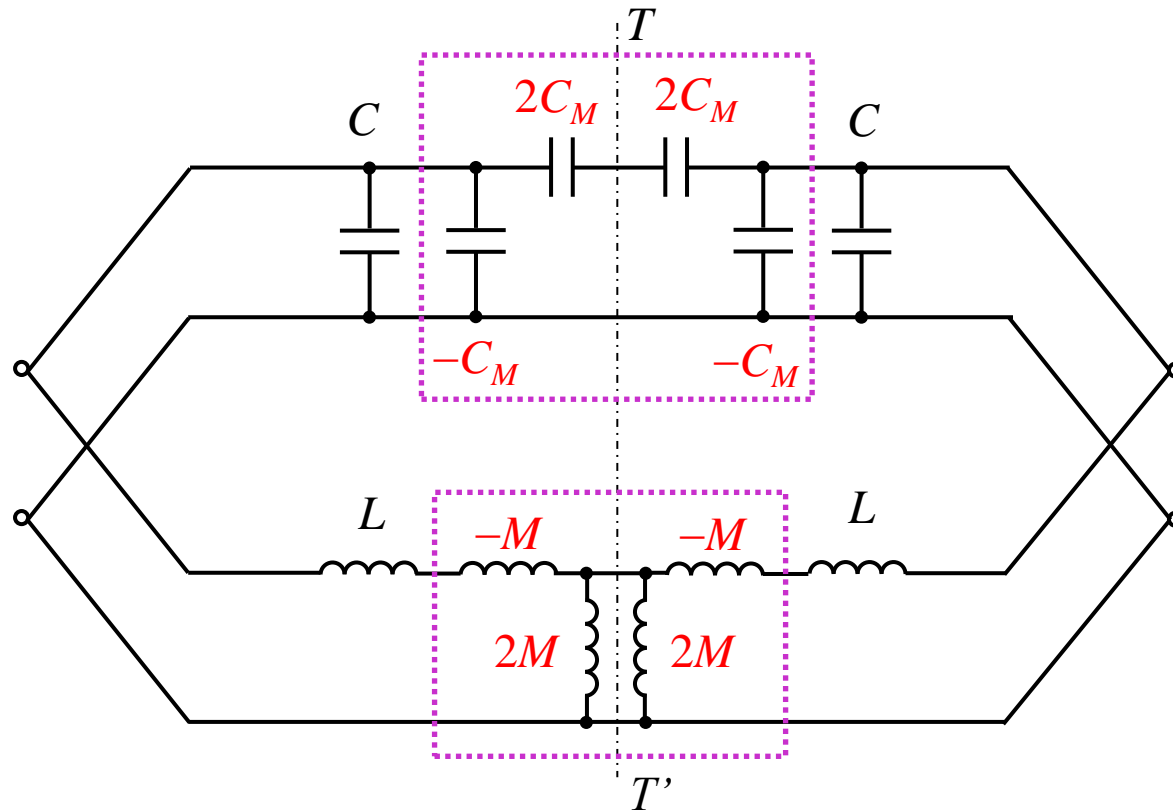
● 偶奇モード解析 (共振器が同調の場合)



$$k_M = \frac{f_e^2 - f_m^2}{f_e^2 + f_m^2} = \frac{M}{L}$$

【補足】結合係数の評価：電磁界結合の場合

■ 電磁界結合（同調共振器の場合）



$$\begin{aligned}
 k_{EM} &= \frac{f_e^2 - f_m^2}{f_e^2 + f_m^2} \\
 &= \frac{CM + LC_M}{LC + MC_M} \\
 &\approx \frac{M}{L} + \frac{C_M}{C} \\
 &\quad (LC \gg MC_M)
 \end{aligned}$$

偶モード

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L+M)(C+C_M)}}$$

奇モード

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L-M)(C-C_M)}}$$

【補足】結合係数の符号の評価

■ 結合係数

● 大きさ

- いずれの結合の種類であっても2つのピーク周波数のみから評価可能

● 符号

- 評価式(ピーク周波数)のみでは正負は判別できない.
- 正負は設計者が決めてよい.
 - フィルタ設計上, 必ずしも磁界結合を正, 電界結合を負にとる必要はない.
- 磁界結合・電界結合の判別
 - 透過係数 S_{21} の位相が反射係数 S_{11} の位相より
 - » 進んでいる場合 → 磁界結合
 - » 遅れている場合 → 電界結合

【補足】結合係数の一般評価式

■ 非同調の共振器間の結合係数(導出略)

$$k = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{f_{02}}{f_{01}} + \frac{f_{01}}{f_{02}} \right) \sqrt{\left(\frac{f_{p2}^2 - f_{p1}^2}{f_{p2}^2 + f_{p1}^2} \right)^2 - \left(\frac{f_{02}^2 - f_{01}^2}{f_{02}^2 + f_{01}^2} \right)^2}$$

● ここで,

- f_{01}, f_{02} : 共振器単体の共振周波数
- f_{p1}, f_{p2} : 結合共振器のピーク周波数

● 同調共振器の場合: $f_{01} = f_{02}$

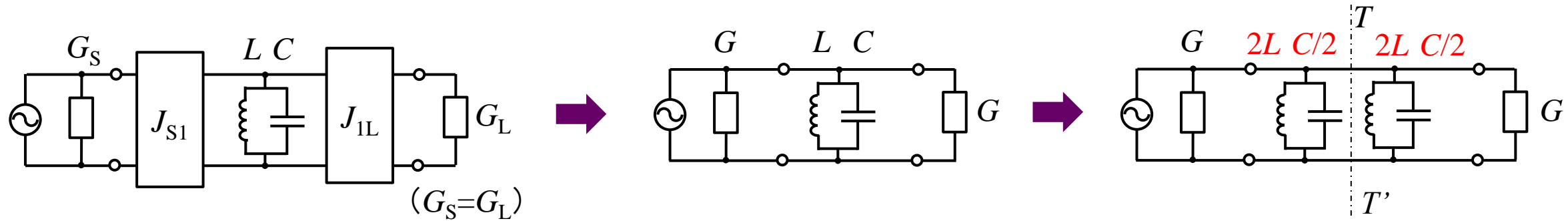
$$k = \pm \frac{f_{p2}^2 - f_{p1}^2}{f_{p2}^2 + f_{p1}^2}$$

【補足】外部Q値の評価方法：2負荷の場合（1/2）



■ 2負荷 (doubly-loaded) 共振器の場合

● 偶奇モード解析



• 偶モード 入力アドミタンス $Y_{in,e} = j\omega \frac{C}{2} + \frac{1}{j\omega 2L} = j\omega_0 \frac{C}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = j\omega_0 \frac{C}{2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega}$

$$= j\omega_0 \frac{C}{2} \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \left(\because \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \approx 2\Delta\omega \right)$$

反射係数 $S_{11,e} = \frac{G - Y_{in,e}}{G + Y_{in,e}} = \frac{1 - j\frac{\omega_0 C}{G} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega_0 C}{G} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - jQ_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + jQ_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}$

• 奇モード 入力アドミタンス $Y_{in,o} = \infty$

反射係数 $S_{11,o} = \frac{G - Y_{in,o}}{G + Y_{in,o}} = -1$

■（続き）

●電力半値幅による評価方法

- 透過係数 $S_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - jQ_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + jQ_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} + 1 \right) = \frac{1}{1 + jQ_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}$

$$|S_{21}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q_e \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

- 電力半値周波数において,

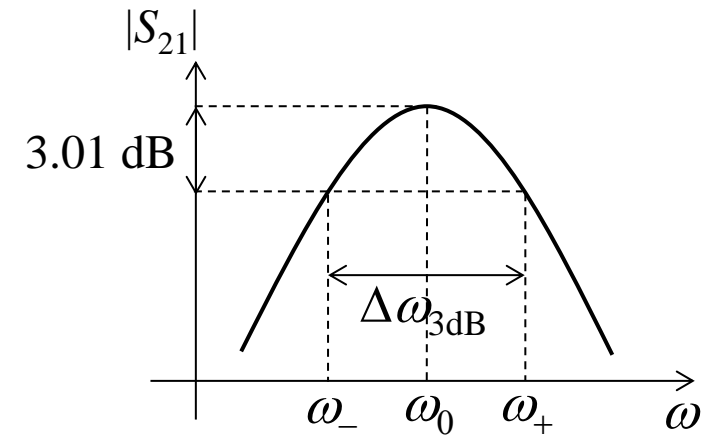
$$Q_e \frac{\Delta\omega_{\pm}}{\omega_0} = \pm 1$$

- 電力半値幅 $\Delta\omega_{3dB} = \Delta\omega_+ - \Delta\omega_- = \frac{\omega_0}{Q_e/2}$

- 外部Q値

$$Q'_e = \frac{Q_e}{2} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{3dB}}$$

ここで, $Q_e = \frac{\omega_0 C}{G}$ (1負荷)



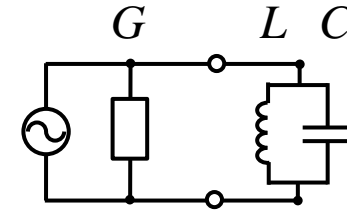
【補足】外部Q値の評価方法：1負荷の場合（1/3）



■ 1負荷 (singly-loaded) 共振器の場合

● 透過振幅特性による評価方法 (2ポート回路)

- 1負荷の外部Q値は, 2負荷の場合の2倍



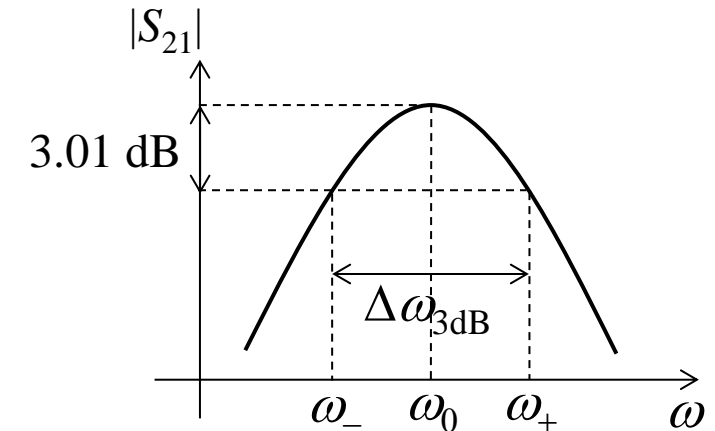
$$Q_e = 2Q'_e$$

- 負荷抵抗側の外部Q値が十分大きい場合, 近似的に, 透過特性のピーク周波数と電力半値幅より,

$$Q_e = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{3dB}}$$

で求められる.

ただし, 1負荷時の電力半値幅は2負荷時とは異なる.



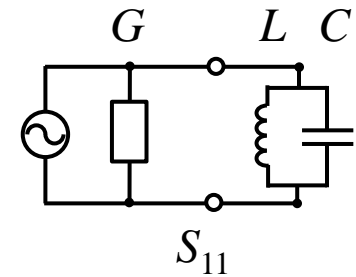
【補足】外部Q値の評価方法：1負荷の場合（2/3）



■ 1負荷 (singly-loaded) 共振器の場合

● 反射位相特性による評価方法 (1ポート回路)

- 反射係数
$$Y_{in} = j\omega_0 C \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$
$$S_{11} = \frac{1 - jQ_e \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + jQ_e \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}}$$

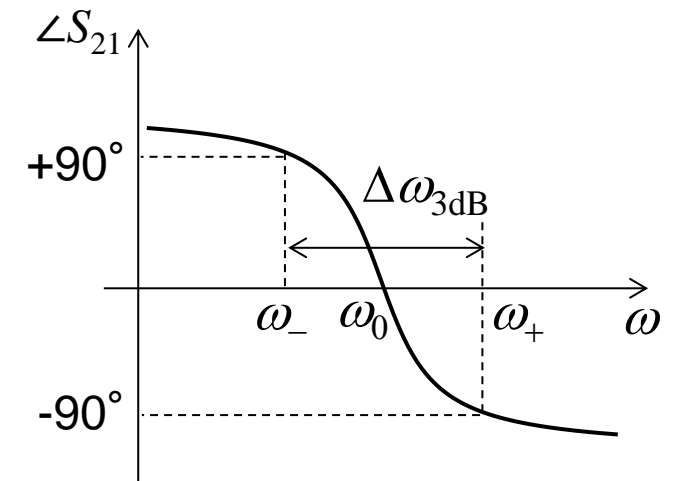


- $\pm 90^\circ$ の周波数において,

$$2Q_e \frac{\Delta\omega_{\pm}}{\omega_0} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega_{\pm 90^\circ} = \Delta\omega_+ - \Delta\omega_- = \frac{\omega_0}{Q_e}$$

- 外部Q値

$$Q_e = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\pm 90^\circ}}$$

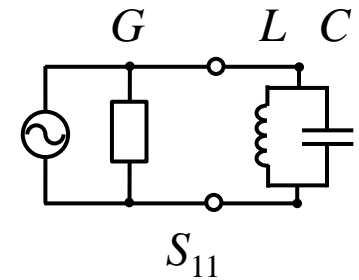


(入力線路の位相特性をディエンベディングする必要あり)

■ 1負荷 (singly-loaded) 共振器の場合

● 反射係数の群遅延による評価方法

- 反射係数 $S_{11} = e^{-j2\phi}$ $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2Q_e \Delta\omega}{\omega_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2Q_e(\omega - \omega_0)}{\omega_0} \right)$



- 群遅延

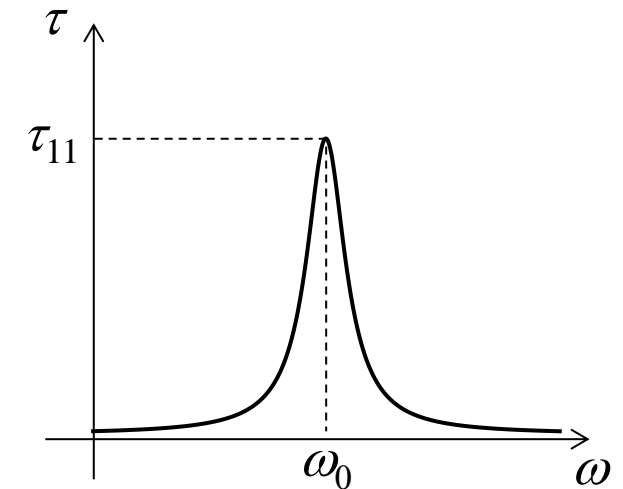
$$\tau_{11}(\omega) = -\frac{\partial(-2\phi)}{\partial\omega} = \frac{4Q_e}{\omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{2Q_e(\omega - \omega_0)}{\omega_0} \right)^2}$$

- 共振周波数における群遅延

$$\tau_{11}(\omega_0) = \frac{4Q_e}{\omega_0}$$

- 外部Q値

$$Q_e = \frac{\omega_0 \tau_{11}(\omega_0)}{4}$$



(入力線路の位相特性をディエンベディングする必要あり)

応用編

応用編：目次

- 結合トポロジー
 - 物理的意味
 - 結合トポロジーの変換手法
- 一般化チェビシェフ関数
 - Sパラメータの有理関数
 - 定義
- 原型フィルタ
 - 原型LPF
 - 原型HPF
 - 周波数変換
- 規格化結合行列
 - 定義
 - 導出
 - 結合係数と外部Q値
- 共振器並列型フィルタ回路
 - 回路合成手順
- 有極バンドパスフィルタの設計
 - 結合行列の合成
 - 結合係数, 外部Q値の設計
 - 結合行列の抽出・評価
 - 設計結果

フィルタ回路合成理論の比較

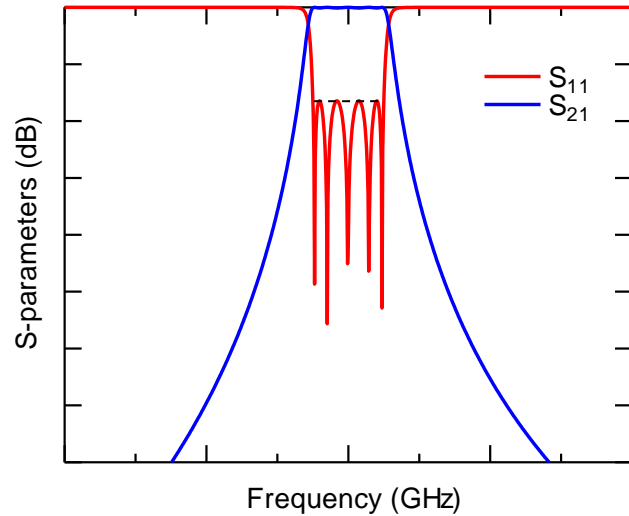


項目	古典的フィルタ理論	最新のフィルタ理論
原型フィルタ	原型LPF	原型LPF／原型HPF
原型フィルタの回路構成	<ul style="list-style-type: none"> ラダー型回路 	<ul style="list-style-type: none"> 共振器並列結合型回路
伝達関数	<ul style="list-style-type: none"> チェビシェフ関数 バターワース関数 (いわゆる無極フィルタ) 	<ul style="list-style-type: none"> 一般化チェビシェフ関数 (無極フィルタのチェビシェフ関数や有極フィルタの楕円関数も含む)
回路合成時に表れる有理関数	<ul style="list-style-type: none"> 入カインピーダンスの連分数展開 $z_{in}(s) = \frac{1}{sg_1 + \frac{1}{sg_2 + \dots}}$	<ul style="list-style-type: none"> アドミタンス行列の部分分数展開 $[Y] = \begin{bmatrix} 0 & jm_{SL} \\ jm_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s + jm_{ii}} \begin{bmatrix} m_{Si}^2 & m_{Si}m_{iL} \\ m_{Si}m_{iL} & m_{iL}^2 \end{bmatrix}$
回路合成で得られる規格化素子値	<ul style="list-style-type: none"> gパラメータ $g_i (i=0, 1, 2, \dots, N, N+1)$ 	<ul style="list-style-type: none"> 規格化結合行列 $[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & \dots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & \dots & m_{2N} & m_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & m_{1N} & m_{2N} & \dots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & \dots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$

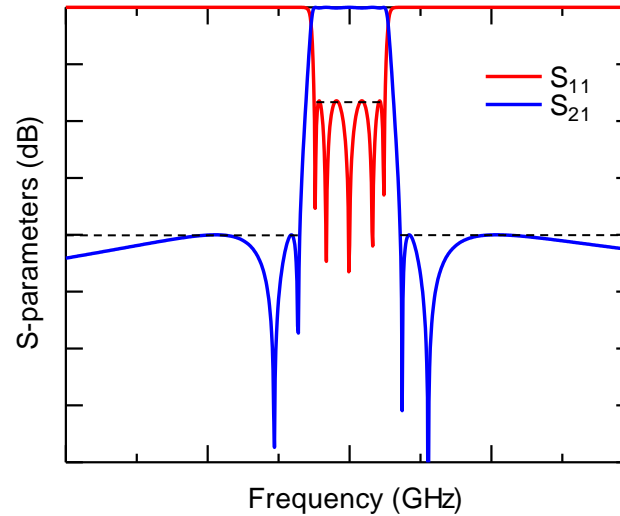
一般化チェビシェフ関数

一般化チェビシェフ関数

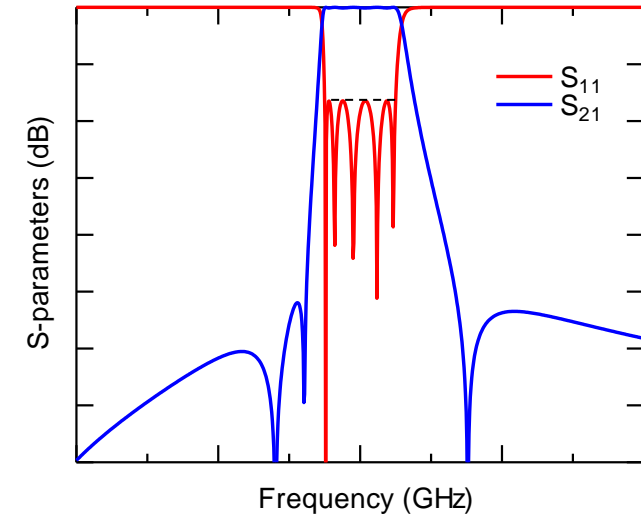
チェビシェフ関数
(無極特性)



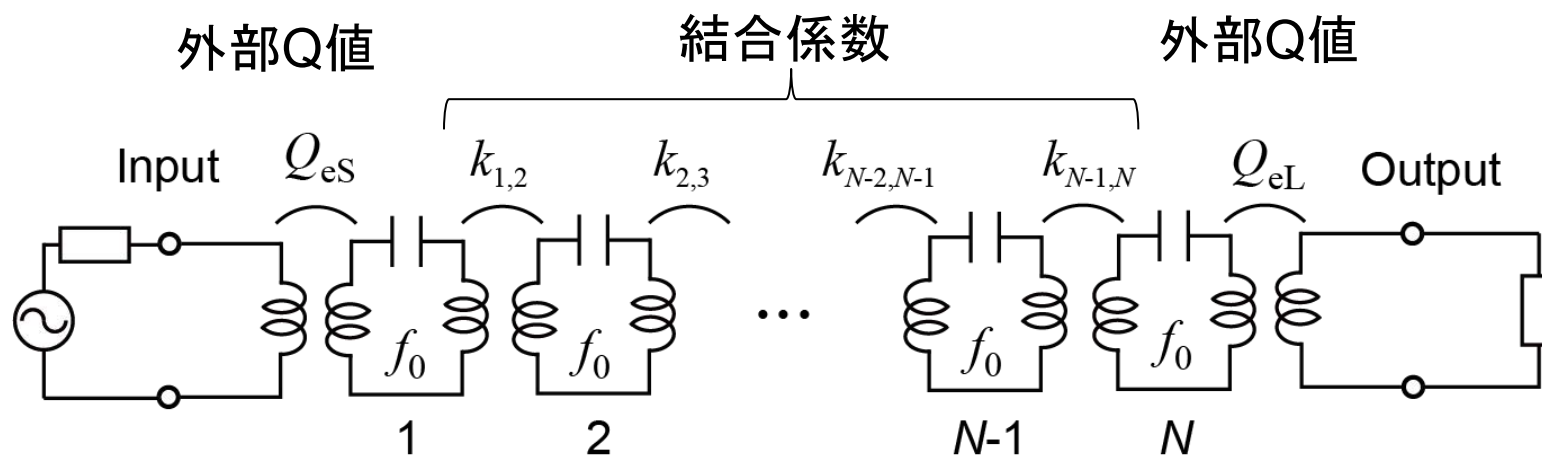
楕円関数
(有極特性)



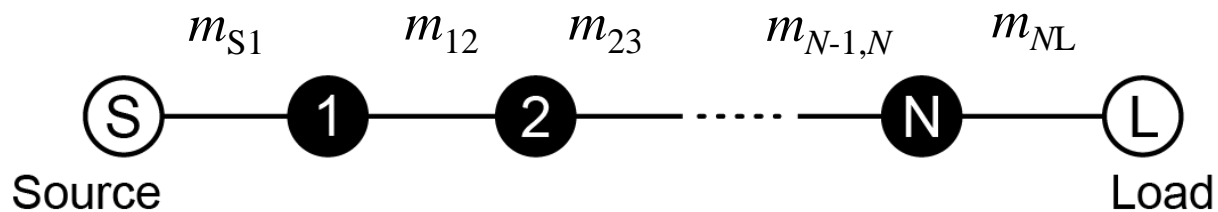
準楕円関数
(有極特性)



結合トポロジーの導入



N段共振器直結形フィルタ回路



結合トポロジー

■ 結合トポロジーとは

● 共振器や入出力をノード, 結合を線で表した回路表現

- トポロジー(数学では位相幾何学):
 - 大まかに言うと, 図形の本質的な特徴を表すもの

● 結合トポロジー(coupling topology)

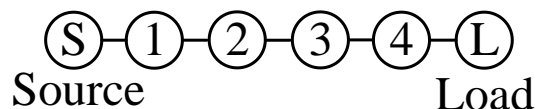
⇔ 物理構造: ある一つの結合トポロジーを実現する構造は多数存在

- 点: ノード(node)
 - › 共振ノード(RN: resonant node): 共振器を表す.
 - › 非共振ノード(NRN: non-resonant node): 入力, 出力, 共振しないノード
- 線
 - › 結合を表す.
 - › 正負が存在

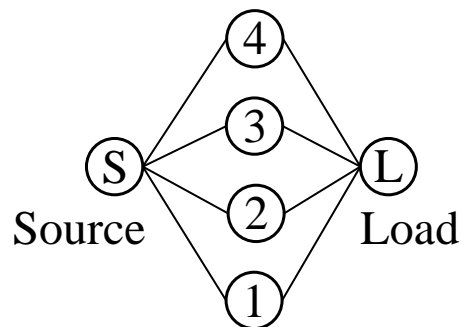
結合トポロジの例



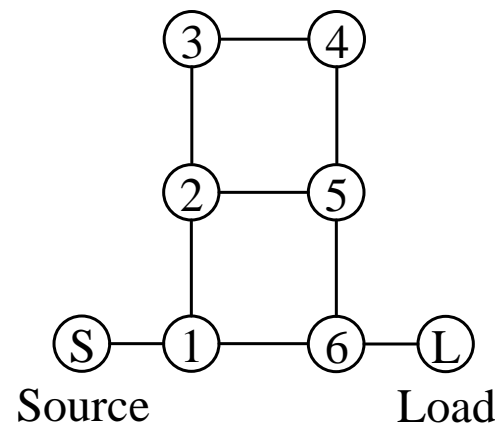
■ 結合トポロジの例



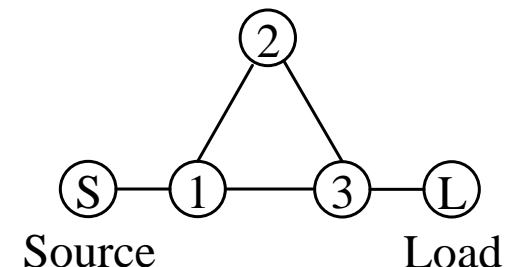
インライン型結合
(共振器直結型)



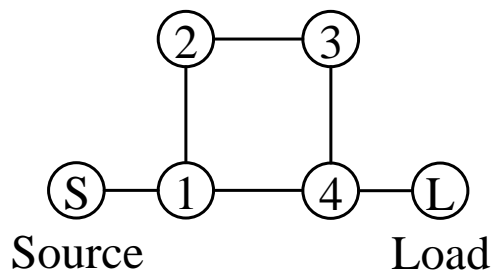
共振器並列型結合
(transversal coupling)



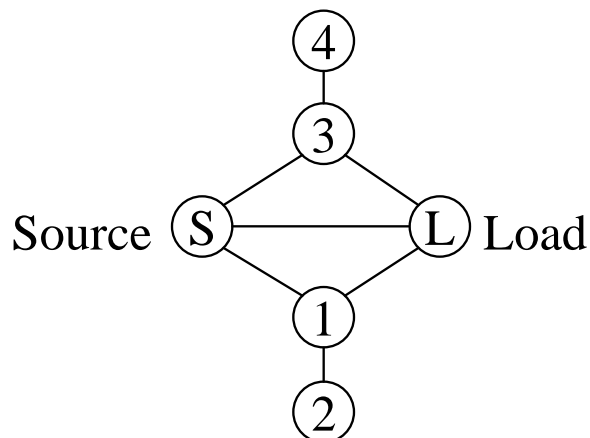
Folded型結合



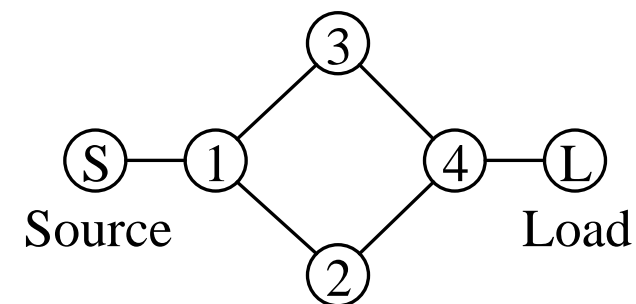
Triplet



Quadruplet



Cul-de-Sac結合



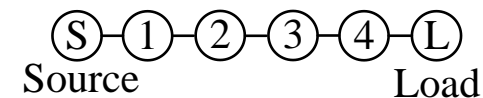
ボックス型結合

伝送零点数の理論上の上限値

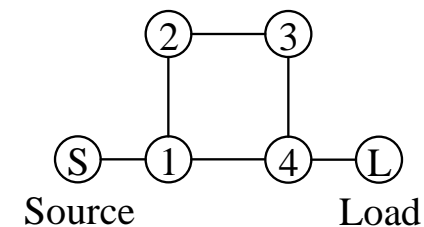
■ 伝送零点の最大数 N_{TZ}

● 計算式: $N_{TZ} = N - N_{min}$

- N : フィルタの共振器の総数
- N_{min} : Source \rightarrow Load間の最短ルート中の共振器数



$$N_{TZ} = 4 - 4 = 0$$



$$N_{TZ} = 4 - 2 = 2$$

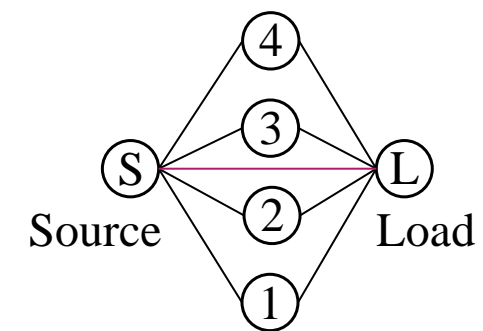
■ 伝送零点数と結合の呼称

● カノニカル結合 (canonical)

- $N_{TZ} = N - 1$

● 完全カノニカル結合 (fully canonical)

- $N_{TZ} = N$
- 入出力直接結合があるとき

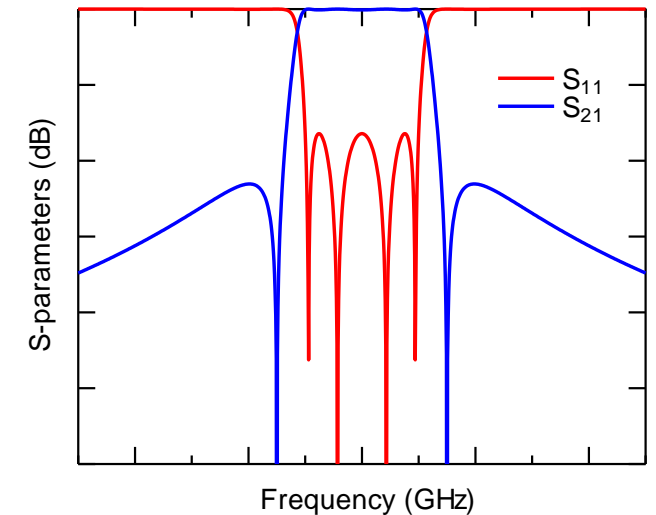
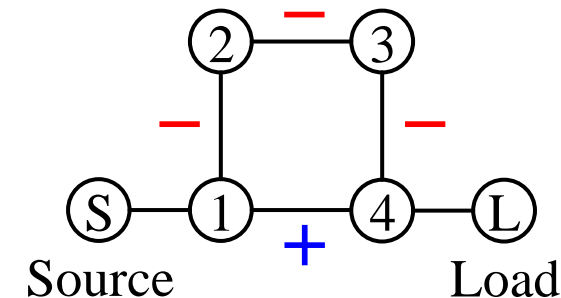
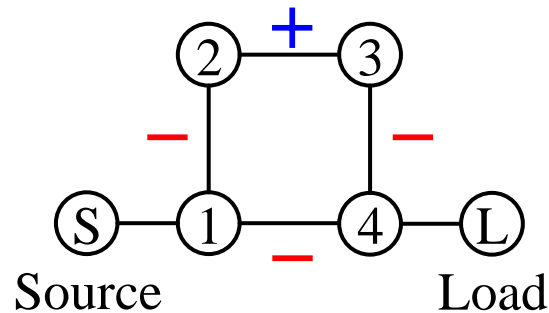
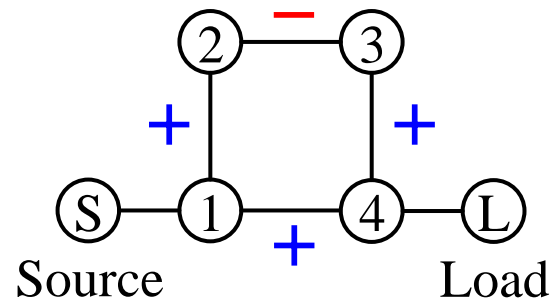
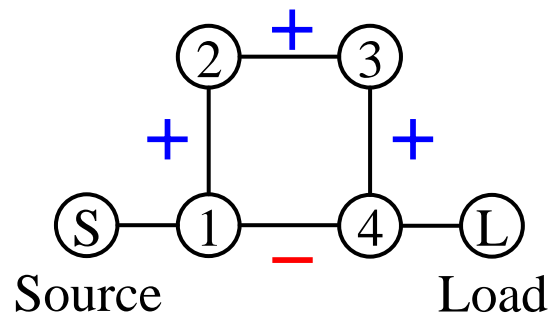


$$N_{TZ} = N - 0 = N$$

結合の符号のambiguity (あいまいさ)

■ 結合行列の要素の符号

- 同じ振幅特性を与える符号の組み合わせが複数存在する場合があります, 一意に定まらない.



すべて同じ特性

【補足】 原型LPFのSパラメータ

■ 原型LPFのSパラメータの有理関数

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)/\epsilon_R}{E(s)}, \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)/\epsilon}{E(s)}$$

● 特性多項式 $E(s)$, $F(s)$, $P(s)$ (いずれも s についての多項式)

- $F(s)$: S_{11} の分子多項式

- 実係数で, 最大次数の係数が1の N 次多項式
- $F(s)=0$ の解: 反射電力が0 (= **反射零点**) になる周波数, その数が N

- $P(s)$: S_{21} の分子多項式

- 実係数で, 最大次数の係数が1の N_{TZ} 次多項式
- $P(s)=0$ の解: 透過電力が0 (= **伝送零点**) になる周波数, その数が $N_{TZ} (\leq N)$

- $E(s)$: 共通の分母多項式

- **Hurwitzの多項式** で, 最大次数の係数が1の N 次多項式
- $E(s)=0$ の解: **s 平面の左半平面** にのみ存在

【補足】Sパラメータのリプル係数

■ リプル係数とフィルタ特性の関係

● 非完全カノニカルの場合 ($N_{TZ} < N$)

- 原型LPFでは無限周波数において,

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}(j\infty) \rightarrow 1 \\ S_{21}(j\infty) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow S_{11}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon_R} \frac{\prod_{k=1}^N (s - z_{11k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{11k})} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_R} = 1 \\ \rightarrow S_{21}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon} \frac{\prod_{k=1}^{N_{TZ}} (s - z_{21k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{21k})} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow \epsilon_R = 1$$

● 完全カノニカルの場合 ($N_{TZ} = N$)

- 原型LPFでは無限周波数において,

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon_R} \frac{\prod_{k=1}^N (s - z_{11k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{11k})} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_R} \\ S_{21}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon} \frac{\prod_{k=1}^N (s - z_{21k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{21k})} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_R^2} + \frac{1}{\epsilon^2} = 1$$

【補足】ユニタリ条件と複素伝達関数

■ Sパラメータのユニタリ条件

- 無損失回路の場合, $s=j\Omega$ において,

$$S_{21}(s)S_{21}(s)^* = 1 - S_{11}(s)S_{11}(s)^* \rightarrow \frac{P(s)P(s)^*}{\epsilon^2 E(s)E(s)^*} = 1 - \frac{F(s)F(s)^*}{\epsilon_R^2 E(s)E(s)^*}$$

paraconjugate

$$\therefore \frac{1}{\epsilon^2} P(s)P(s)^* = E(s)E(s)^* - \frac{1}{\epsilon_R^2} F(s)F(s)^*$$

■ 複素伝達関数 (complex transfer function)

- ユニタリ条件より式を整理すると,

$$S_{21}(s)S_{21}(s)^* = \frac{P(s)P(s)^*}{P(s)P(s)^* + \frac{\epsilon^2}{\epsilon_R^2} F(s)F(s)^*} = \frac{1}{1 - j \frac{F(s)/\epsilon_R}{P(s)/\epsilon}} \frac{1}{1 + j \frac{F(s)^*/\epsilon_R}{P(s)^*/\epsilon}} = \frac{1}{1 - j \frac{\epsilon}{\epsilon_R} K(s)} \frac{1}{1 + j \frac{\epsilon}{\epsilon_R} K(s)^*}$$

$$\therefore S_{21}(s) = \frac{1}{1 - j \frac{\epsilon}{\epsilon_R} K(s)} \quad (\text{複素伝達関数})$$

【補足】 複素角周波数の多項式の注意点

■ 多項式 $Q(s)$ の conjugate と paraconjugate

多項式=0の零点

- 多項式 $Q(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_Ns^N = \prod_{k=1}^N (s - s_{0k})$

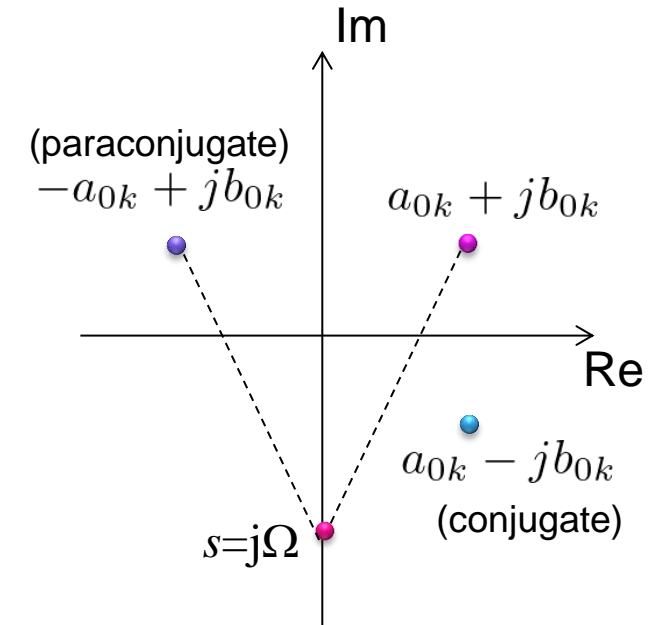
- 多項式の complex conjugation (複素共役)

$$Q^*(s) = q_0^* + q_1^*s + q_2^*s^2 + \dots + q_N^*s^N = \prod_{k=1}^N (s - s_{0k}^*)$$

- 多項式の paraconjugation

$$\begin{aligned} Q(s)^* &= Q^*(-s) \\ &= q_0^* - q_1^*s + q_2^*s^2 + \dots + q_N^*s^N \quad (N:\text{even}) \\ &= q_0^* - q_1^*s + q_2^*s^2 + \dots - q_N^*s^N \quad (N:\text{odd}) \\ &= (-1)^N \prod_{k=1}^N (s + s_{0k}^*) \end{aligned}$$

- よって, $|Q(j\Omega)|^2 = Q(j\Omega)Q(j\Omega)^* = \prod_{k=1}^N (a_{0k}^2 + (\Omega - b_{0k})^2)$



(複素角周波数 $s=j\Omega$ (純虚数) であるため, paraconjugate を使わないとエネルギー保存則を満足しない)

伝達関数

■ 伝達関数 (transfer function)

- 最大有能電力 P_{\max} に対する負荷での消費電力 P_{load} の比

$$|S_{21}(s)|_{s=j\Omega}^2 = \frac{P_{\text{load}}}{P_{\max}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 |K(s)|_{s=j\Omega}^2}$$

- ここで, ε はリプル係数 (実数)
- **特性関数** の有理関数表現の標準形

$$\varepsilon K(s) = \varepsilon \frac{F(s)}{P(s)} = \frac{F(s)/\epsilon_R}{P(s)/\epsilon}$$

– ただし, $\varepsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon_R}$

- » 非完全カノニカルの場合, $\epsilon_R = 1$
- » 完全カノニカルの場合, $\epsilon_R > 1$

一般化チェビシェフ関数

■ 特性関数が一般化チェビシェフ関数 C_N の場合

- 複素伝達関数

$$S_{21}(j\Omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\epsilon}{\epsilon_R} C_N(\Omega)} \quad \left(C_N(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{P(\Omega)} \right)$$

- 一般化チェビシェフ関数 (generalized Chebyshev function)

$$C_N(\Omega) = \cosh \left[\sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n(\Omega)) \right]$$

- 反射係数 S_{11} のリプル係数 (L_R : 通過域のエッジにおける反射係数(dB))

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{L_R/10} - 1}} \left| \frac{P(\Omega)}{F(\Omega)/\epsilon_R} \right|_{\Omega=\pm 1}$$

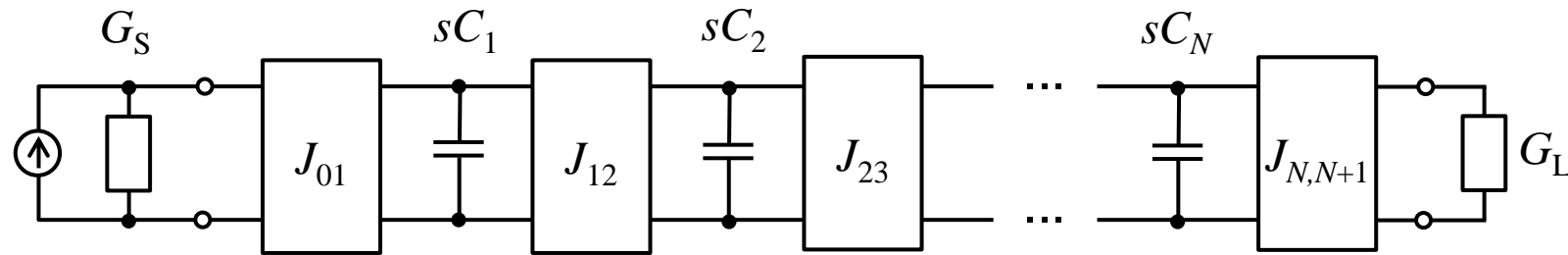
- 伝送零点の規格化角周波数を Ω_n とすると,

$$P(\Omega) = \prod_{n=1}^{N_{TZ}} (\Omega - \Omega_n)$$

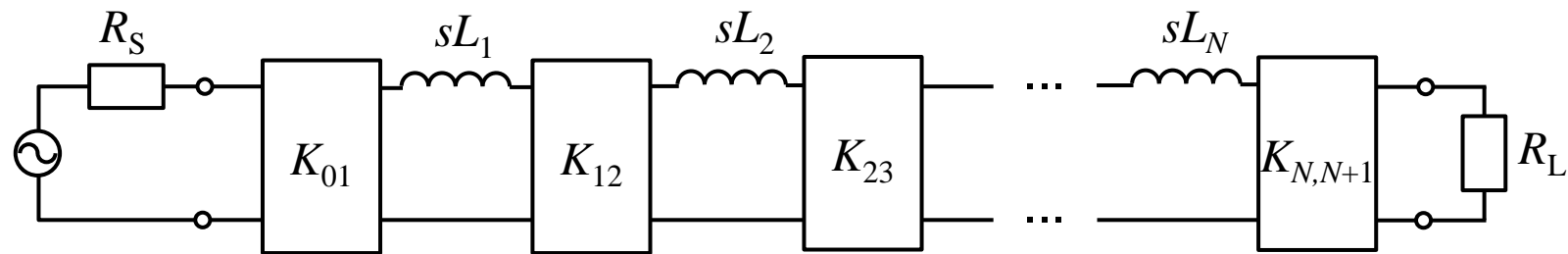
原型LPF：飛び越し結合なし

■ 原型低域通過フィルタ(原型LPF)

- 飛び越し結合がない場合
 - Jインバータを用いた回路



- Kインバータを用いた回路

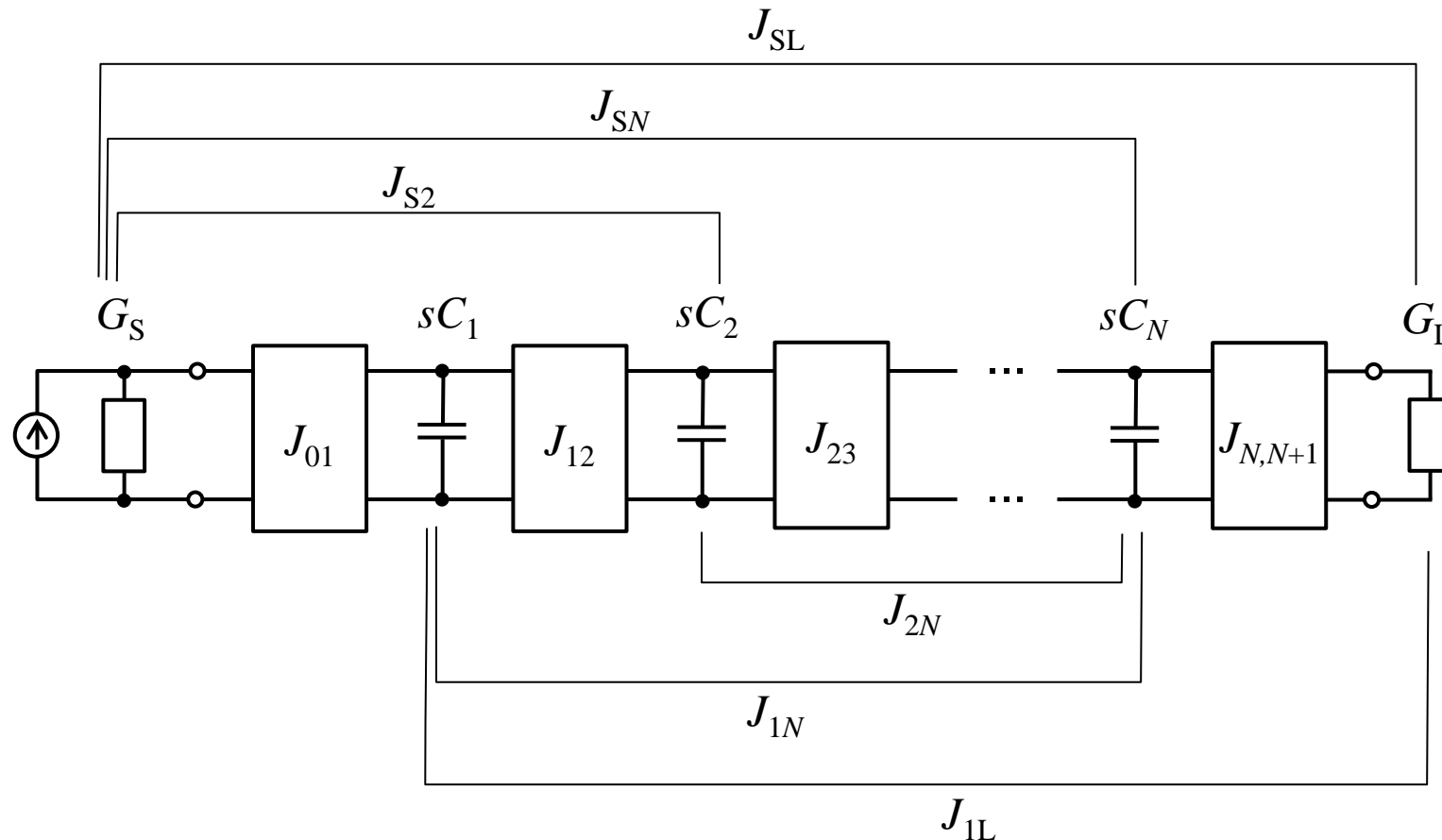


- 以降は, Jインバータで表現するが, 結合行列を用いればいずれでも同じ

原型LPF：飛び越し結合あり

■ 原型低域通過フィルタ(原型LPF)

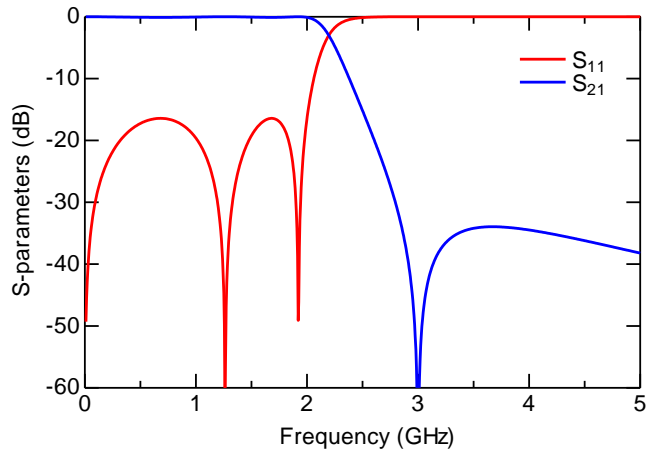
- 飛び越し結合(隣接共振器以外との結合)がある場合



原型LPFからの周波数変換

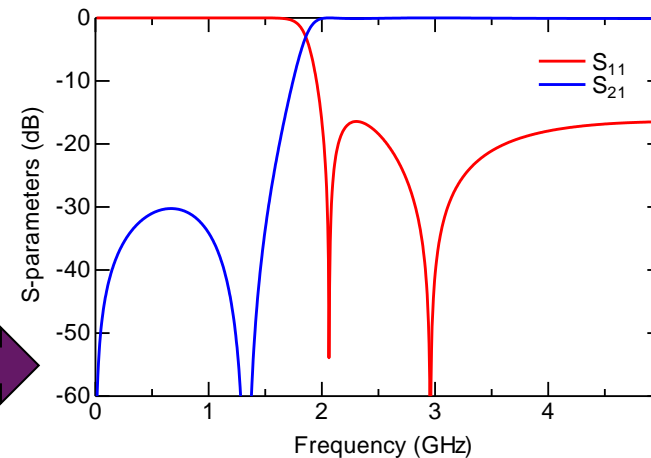
① LPF

$$\Omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \Omega_c$$

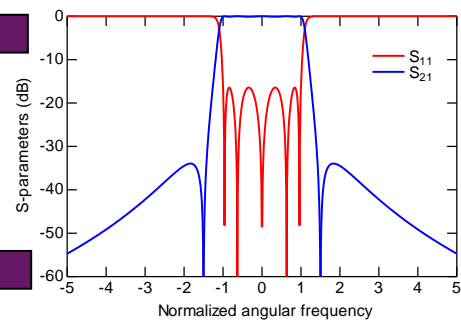


② HPF

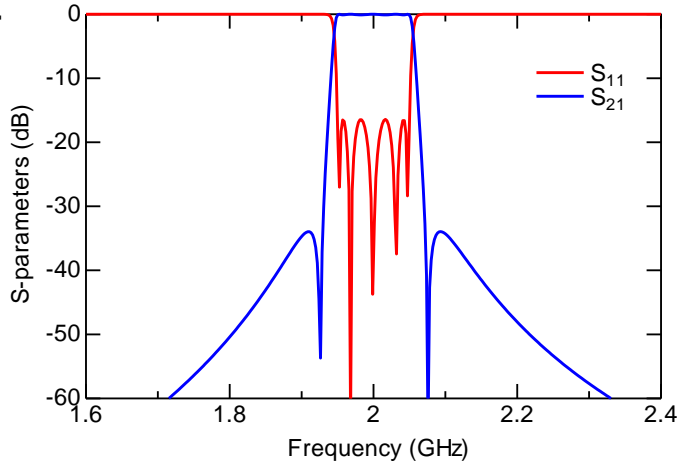
$$\Omega \rightarrow -\frac{\omega_c}{\omega} \Omega_c$$



原型LPF
(例: 有極特性)

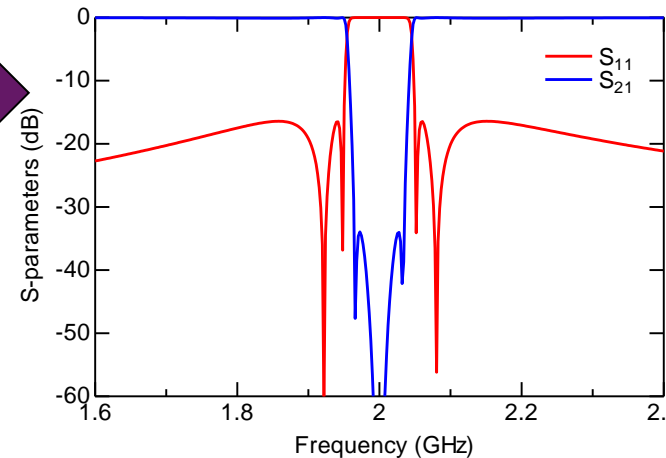


③ BPF



$$\Omega \rightarrow \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Omega_c$$

④ BSF



$$\Omega \rightarrow -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \Omega_c$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

【補足】 原型HPFのSパラメータ

■ 原型HPFのSパラメータの有理関数

$$S_{11}(s) = \frac{P(s)/\epsilon}{E(s)}, \quad S_{21}(s) = \frac{F(s)/\epsilon_R}{E(s)}$$

● 特性多項式 $E(s)$, $F(s)$, $P(s)$ (いずれも s についての多項式)

• $P(s)$: S_{11} の分子多項式

- 実係数で, 最大次数の係数が1の N_{RZ} 次多項式
- $P(s)=0$ の解: 反射電力が0 (= **反射零点**) になる周波数, その数が $N_{RZ} (\leq N)$

• $F(s)$: S_{21} の分子多項式

- 実係数で, 最大次数の係数が1の N 次多項式
- $F(s)=0$ の解: 透過電力が0 (= **伝送零点**) になる周波数, その数が N

• $E(s)$: 共通の分母多項式

- Hurwitz の多項式で, 最大次数の係数が1の N 次多項式
- $E(s)=0$ の解: s 平面の左半平面にのみ存在

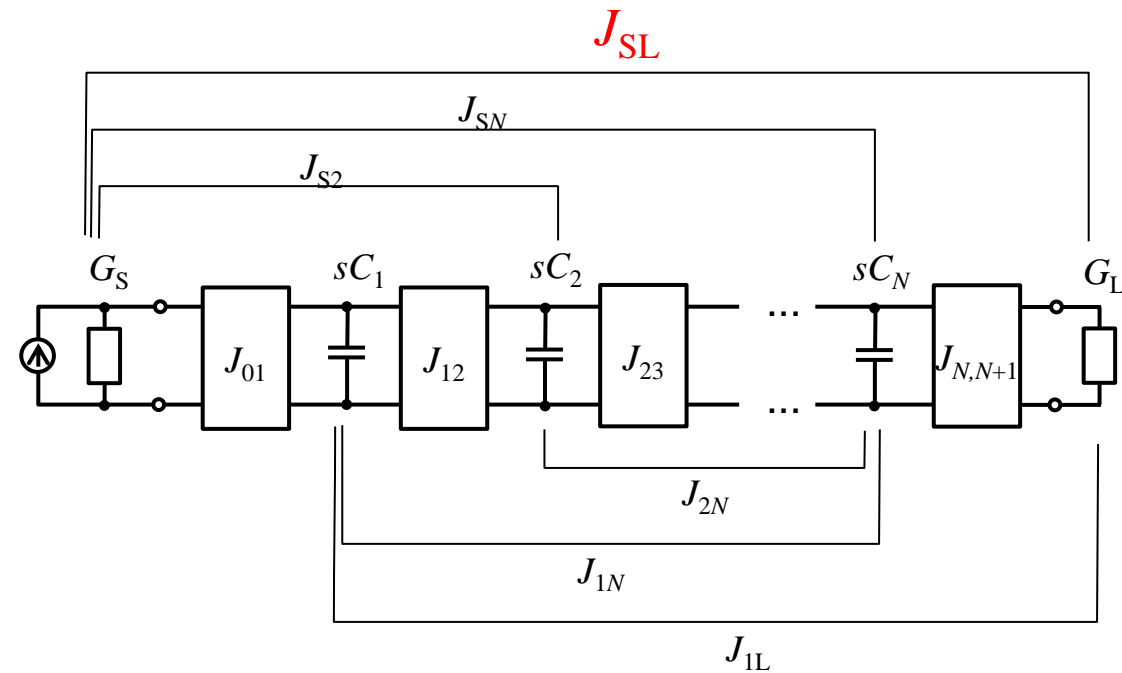
【補足】 原型HPF

■ 原型高域通過フィルタ (原型HPF)

- 原型LPFと同じ回路
- 相違点
 - 入出力直接結合 (非完全カノニカル)
 - 原型LPF: $J_{SL}=0$ (阻止域 $s=j\infty$ では遮断)
 - 原型HPF: $J_{SL}=1$ (通過域 $s=j\infty$ では通過)
- 原型HPF
 - 非完全カノニカル ($N < N_{RZ}$) の場合, 無限周波数において,

$$S_{11}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon} \frac{\prod_{k=1}^{N_{RZ}} (s - z_{11k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{11k})} \rightarrow 0$$

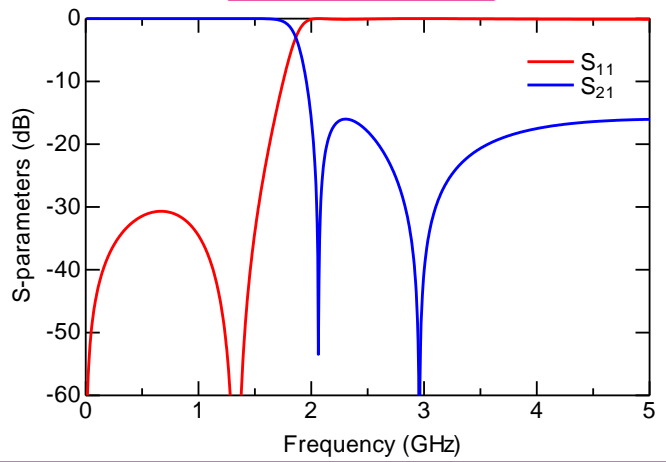
$$S_{21}(j\infty) = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{1}{\epsilon_R} \frac{\prod_{k=1}^N (s - z_{21k})}{\prod_{k=1}^N (s - p_{21k})} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_R} = 1$$



【補足】 原型HPFからの周波数変換

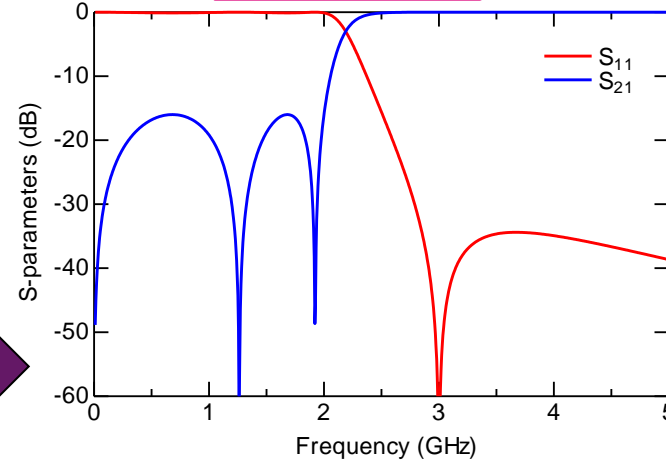
① LPF

$$\Omega \rightarrow -\frac{\omega_c}{\omega} \Omega_c$$



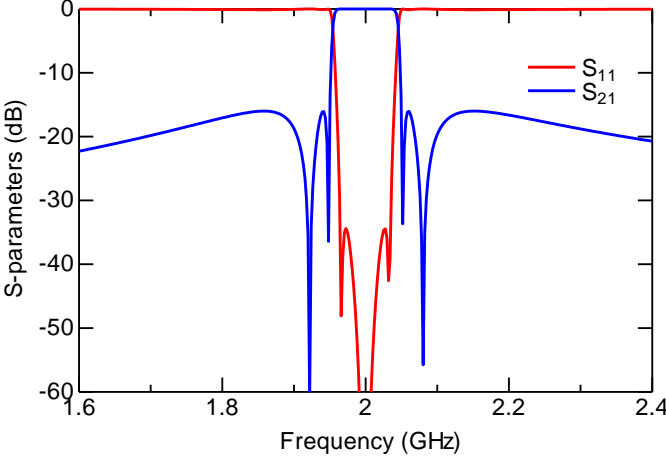
② HPF

$$\Omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \Omega_c$$



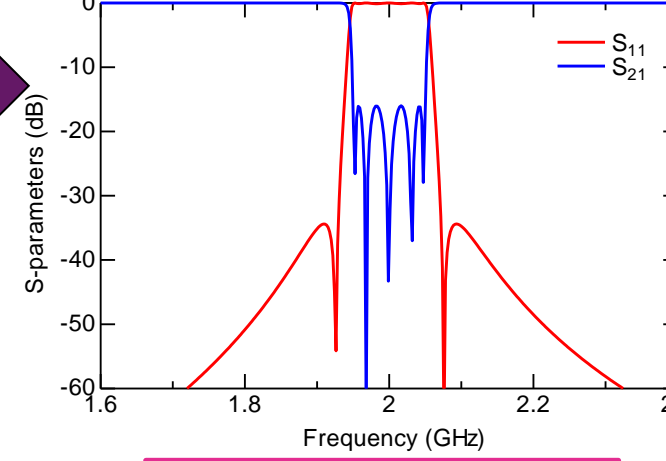
③ BPF

$$\Omega \rightarrow -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \Omega_c$$

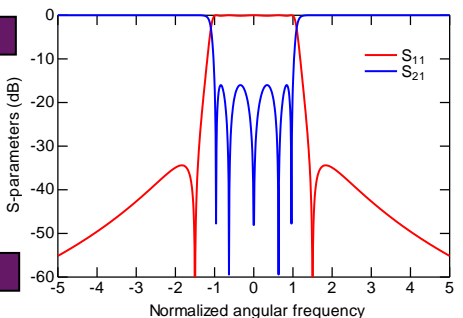


④ BSF

$$\Omega \rightarrow \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Omega_c$$



原型HPF
(例: 有極特性)



* 通過域・阻止域が原型LPFとは逆のため、周波数変換も原型LPFとは逆

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

規格化結合行列

■ 規格化結合行列

- 原型フィルタ(規格化角周波数領域)における結合量を表した行列
- 結合係数, 外部Q値, 共振周波数を得るには周波数変換が必要

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & \cdots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{2N} & m_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & m_{1N} & m_{2N} & \cdots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & \cdots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$$

- m_{ii} : 自己結合 (self coupling) (=共振周波数)
- m_{ij} : 共振器間の相互結合量 (mutual coupling)
- m_{Si} : 電源の内部抵抗と共振器との結合量
- m_{iL} : 負荷抵抗と共振器との結合量
- m_{SL} : 電源の内部抵抗と負荷抵抗との直接結合量

BPFの k, Q, f_0

■ 周波数変換 (原型LPF → BPF)

$$\Omega \rightarrow \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

ω : BPFの角周波数
 ω_0 : BPFの中心角周波数
 FBW: BPFの比帯域幅

■ 共振周波数, 結合係数, 外部Q値

● 共振角周波数 ω_{0i}

$$\omega_{0i} = \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{\text{FBW}}{\Omega_c} m_{ii} + \sqrt{\left(\frac{\text{FBW}}{\Omega_c} m_{ii} \right)^2 + 4} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

● 結合係数 k_{ij}

$$k_{ij} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} m_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

● 入力側の外部Q値 $Q_{eS,i}$

$$Q_{eS,i} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW} \cdot m_{Si}^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

● 出力側の外部Q値 $Q_{eL,i}$

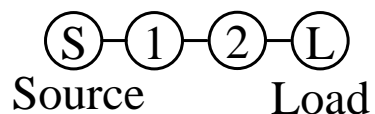
$$Q_{eL,i} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW} \cdot m_{iL}^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

● 入出力直接結合 k_{SL}

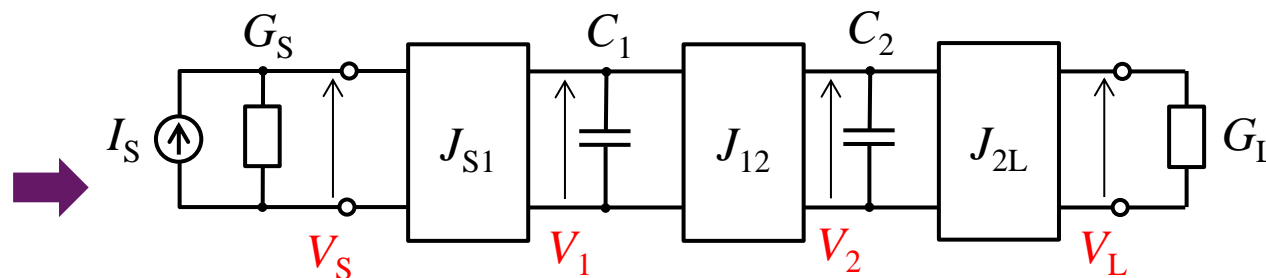
$$k_{SL} = m_{SL}$$

■ 2段結合共振器フィルタ

● 飛び越し結合なし



結合トポロジー



Jインバータを用いた原型LPF

● 回路方程式

- KCLより,
$$\begin{bmatrix} G_S & jJ_{S1} & 0 & 0 \\ jJ_{S1} & j\Omega C_1 & jJ_{12} & 0 \\ 0 & jJ_{12} & j\Omega C_2 & jJ_{2L} \\ 0 & 0 & jJ_{2L} & G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ただし, Jインバータ前後の電流の関係を利用

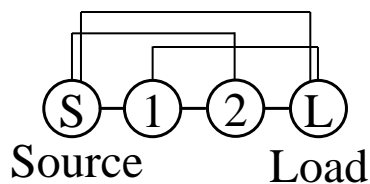
$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm \frac{1}{jJ} \\ \mp jJ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 &= \pm jJV_2 \\ I_2 &= \mp jJV_1 \end{aligned}$$

結合行列の導出：回路方程式（飛び越し結合あり）

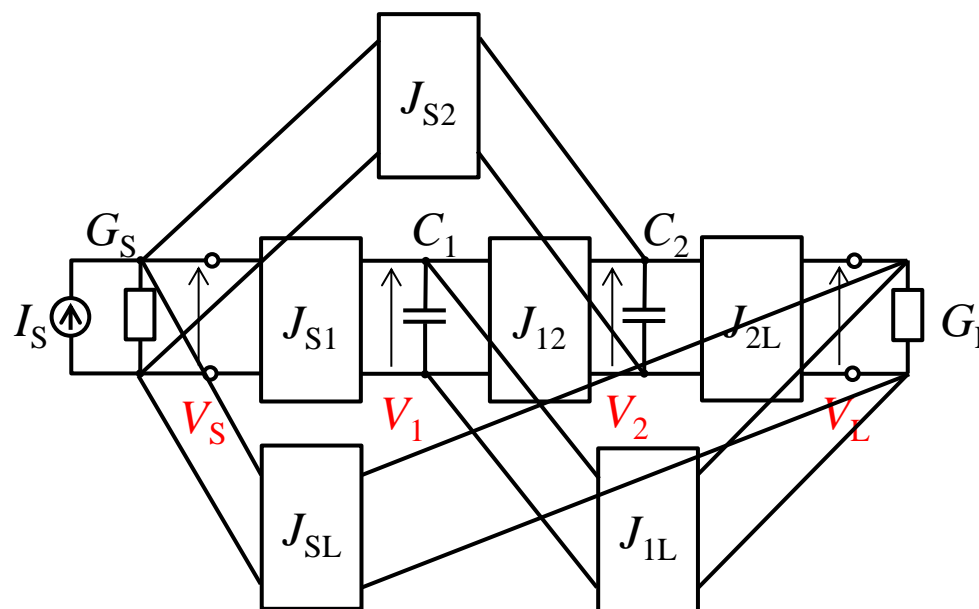


■ 2段結合共振器フィルタ

- 飛び越し結合がある場合



結合トポロジー



Jインバータを用いた原型LPF

- 回路方程式

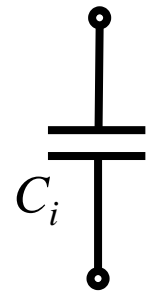
$$\begin{bmatrix} G_S & jJ_{S1} & jJ_{S2} & jJ_{SL} \\ jJ_{S1} & j\Omega C_1 & jJ_{12} & jJ_{1L} \\ jJ_{S2} & jJ_{12} & j\Omega C_2 & jJ_{2L} \\ jJ_{SL} & jJ_{1L} & jJ_{2L} & G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

結合行列の導出：原型LPFの共振器

■ 原型LPFの共振器

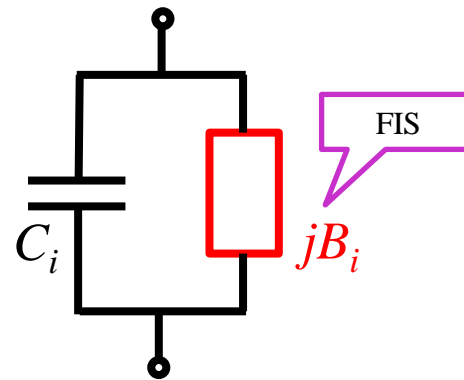
● Frequency Invariant Reactance/Susceptance (FIR/FIS)の導入

- 周波数が増え変化しても一定のリアクタンス値(あるいはサセプタンス値)を持つ回路素子(=抵抗あるいはコンダクタンスに虚数単位を乗じた値)
- リアクタンス特性(あるいはサセプタンス特性)を共振周波数付近で線形近似(=狭帯域近似)



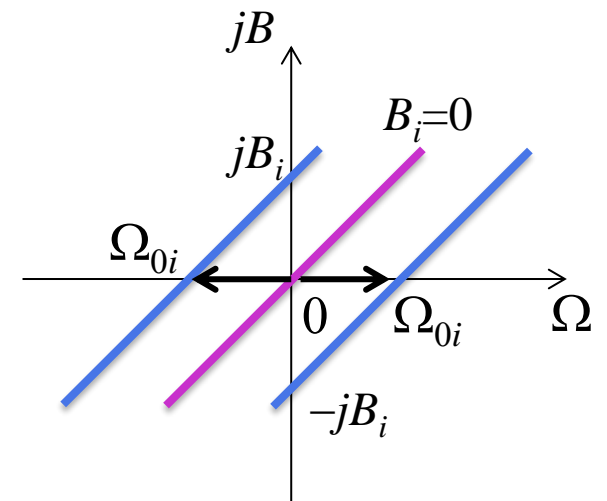
共振条件 $j\Omega C_i = 0$

共振角周波数 $\Omega_{0i} = 0$



$j\Omega C_i + jB_i = 0$

$\Omega_{0i} = -\frac{B_i}{C_i}$



原型LPFの共振器のサセプタンス特性

結合行列の導出：規格化アドミタンス行列

■ 回路方程式の変形

- 対角項の C_1 と C_2 にFISを導入

$$[Y][V] = [I]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} G_S & jJ_{S1} & jJ_{S2} & jJ_{SL} \\ jJ_{S1} & j\Omega C_1 + jB_1 & jJ_{12} & jJ_{1L} \\ jJ_{S2} & jJ_{12} & j\Omega C_2 + jB_2 & jJ_{2L} \\ jJ_{SL} & jJ_{1L} & jJ_{2L} & G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 電源内部抵抗・負荷抵抗・キャパシタンスでアドミタンス行列の規格化

$$[\bar{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G_S}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{G_L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_S & jJ_{S1} & jJ_{S2} & jJ_{SL} \\ jJ_{S1} & j\Omega C_1 + jB_1 & jJ_{12} & jJ_{1L} \\ jJ_{S2} & jJ_{12} & j\Omega C_2 + jB_2 & jJ_{2L} \\ jJ_{SL} & jJ_{1L} & jJ_{2L} & G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G_S}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{G_L}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} + j\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & m_{2L} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & 0 \end{bmatrix}$$

入出力の位置 $= [G] + j\Omega[C] + j[M]$ 共振ノードの位置 規格化結合行列

結合行列の導出：規格化された回路方程式

(続き)

- 電流ベクトル, 電圧ベクトルも同様に規格化

$$[\bar{V}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G_S}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{G_L}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{G_S} V_S \\ \sqrt{C_1} V_1 \\ \sqrt{C_2} V_2 \\ \sqrt{G_L} V_L \end{bmatrix}$$

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G_S}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{G_L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_S}{\sqrt{G_S}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 規格化された回路方程式

$$\therefore [\bar{Y}] [\bar{V}] = [\bar{I}]$$

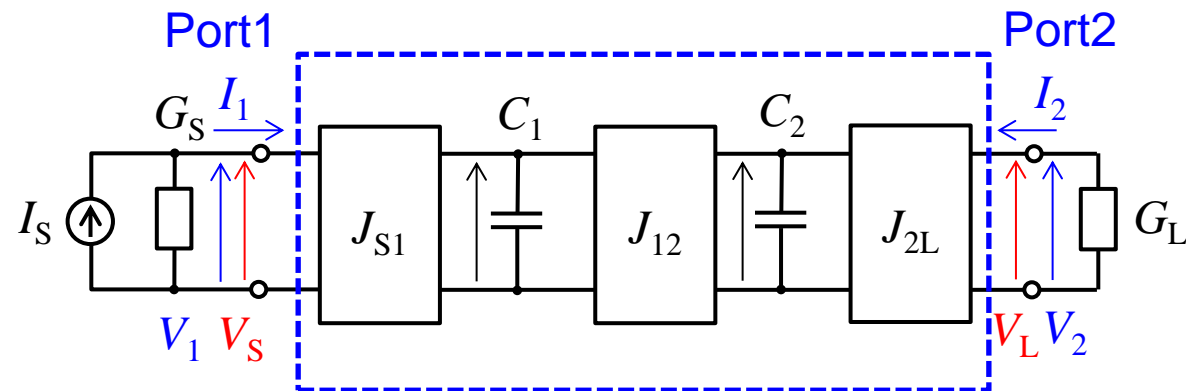
- 共振器 N 段に容易に一般化できる.

結合行列を用いたSパラメータの導出 (1/3)

■ ポート電圧・ポート電流の計算

● 2ポートフィルタ回路の端子条件より,

- ポート1に流れる電流: $I_1 = I_S - G_S V_S$
- ポート2に流れる電流: $I_2 = -G_L V_L$
- ポート1における電圧: $V_1 = V_S$
- ポート2における電圧: $V_2 = V_L$



結合行列を用いたSパラメータの導出 (2/3)

■ ルート電力波からSパラメータの計算

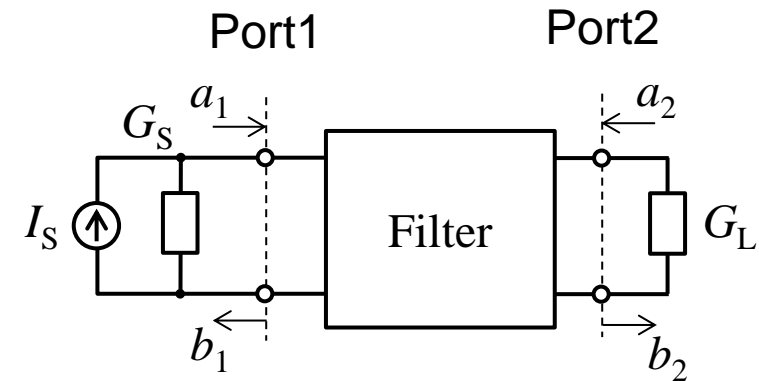
● ルート電力波の定義より,

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{G_S}}(G_S V_1 + I_1) = \frac{I_S}{2\sqrt{G_S}}$$

$$b_1 = \frac{1}{2\sqrt{G_S}}(G_S V_1 - I_1) = \frac{2G_S V_S - I_S}{2\sqrt{G_S}}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\sqrt{G_L}}(G_L V_2 + I_2) = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{2\sqrt{G_L}}(G_L V_2 - I_2) = \sqrt{G_L} V_L$$



● Sパラメータの定義より,

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{2G_S}{I_S} V_S - 1 = 2[\bar{Y}]_{11}^{-1} - 1$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{2\sqrt{G_S G_L}}{I_S} V_L = 2[\bar{Y}]_{N+2,1}^{-1}$$

ここで、未知の電圧 V_S , V_L は以下の通り

$$[\bar{V}] = [\bar{Y}]^{-1} [\bar{I}] \Rightarrow \begin{cases} V_S = \frac{I_S}{G_S} [\bar{Y}]_{11}^{-1} \\ V_L = \frac{I_S}{\sqrt{G_S G_L}} [\bar{Y}]_{N+2,1}^{-1} \end{cases}$$

ただし、 $[\bar{Y}]_{i,j}^{-1}$ は逆行列の要素 (i,j) を表す。

結合行列を用いたSパラメータの導出 (3/3)

■ 規格化結合行列からSパラメータを求める計算式

● Sパラメータ

$$S_{11}(\Omega) = \pm(1 - 2[A(\Omega)]_{11}^{-1}) \quad (\text{符号はK/Jインバータによって決まる})$$

$$S_{21}(\Omega) = 2[A(\Omega)]_{N+2,1}^{-1}$$

- $[A]$: インピーダンス行列 $[Z]$ またはアドミタンス行列 $[Y] \in \mathbb{C}^{(N+2) \times (N+2)}$

$$[A] = [R] + j\Omega[U] + j[M]$$

– ここで, $[R] = \text{diag}[1, 0, 0, \dots, 0, 1]$

(SourceやLoadの位置を表す行列)

$$[U] = \text{diag}[0, 1, 1, \dots, 1, 0]$$

(共振ノードの位置を表す行列)

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & \cdots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{2N} & m_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & m_{1N} & m_{2N} & \cdots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & \cdots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$$

(規格化結合行列)

【補足】結合行列と結合係数・外部Q値の関係 (1/4)

■ 規格化結合行列と回路パラメータの関係

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & \cdots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} & m_{1L} \\ m_{S2} & m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{2N} & m_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & m_{1N} & m_{2N} & \cdots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & \cdots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$$

● 共振角周波数の導出

- 回路方程式の規格化アドミタンス行列の対角要素

$$j\Omega + j\frac{B_i}{C_i} = j\Omega + jm_{ii} = 0 \quad \therefore \Omega_{0i} = -m_{ii} = \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \left(\frac{\omega_{0i}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{0i}} \right)$$



$$\omega_{0i} = \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{\text{FBW}}{\Omega_C} m_{ii} + \sqrt{\left(\frac{\text{FBW}}{\Omega_C} m_{ii} \right)^2 + 4} \right)$$

【補足】結合行列と結合係数・外部Q値の関係 (2/4)

■ 規格化結合行列と回路パラメータの関係

● 共振器間の結合係数の導出

- 一般表現

$$k_{ij} = \frac{J_{ij}}{\sqrt{b_i b_j}}$$

Jインバータパラメータ [S]
ノードのサセプタンス [S]

- BPFの結合係数

$$k_{ij} = \frac{J_{ij}}{\sqrt{b_i b_j}} = \frac{J_{ij}}{\sqrt{\frac{\Omega_C}{\text{FBW}} C_i \cdot \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} C_j}} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_C} \frac{J_{ij}}{\sqrt{C_i C_j}} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_C} m_{ij}$$

ここで,

$$\begin{aligned} jB_{ri} &= j\Omega C_i + jB_i = j \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) C_i + jB_i \\ &= j \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) C_i + jB_i \\ &\approx j\omega C_{ri} + \frac{1}{j\omega L_{ri}} \end{aligned}$$

ただし, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}, \omega_{0i} = \frac{1}{\sqrt{L_{ri} C_{ri}}}$

サセプタンススロープパラメータを用いて,

$$\begin{aligned} \rightarrow b_i(\omega_0) &= \frac{\omega_0}{2} \frac{\partial B_{ri}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 C_{ri} \\ &= \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \frac{\omega_0}{\omega_0} C_i \\ &= \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} C_i \end{aligned}$$

【補足】結合行列と結合係数・外部Q値の関係 (3/4)

■ 規格化結合行列と回路パラメータの関係

● 外部Q値の導出

- 一般表現

$$Q_{eS,i} = \frac{b_i}{J_{S,i}^2/G_S}, \quad Q_{eL,i} = \frac{b_i}{J_{NL}^2/G_L}$$

ノードのサセプタンス [S]

- BPFの外部Q値

入力側 $Q_{eS,i} = \frac{\omega_0 C_{ri}}{J_{S,i}^2/G_S} = \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \frac{G_S C_i}{J_{S,i}^2}$

$$= \frac{\Omega_C}{\text{FBW}} \left(\frac{\sqrt{G_S C_i}}{J_{S,i}} \right)^2$$

$$= \frac{\Omega_C}{\text{FBW} \cdot m_{S,i}^2}$$

出力側 $Q_{eL,i} = \frac{\Omega_C}{\text{FBW} \cdot m_{i,L}^2}$

【補足】結合行列と結合係数・外部Q値の関係 (4/4)

■ gパラメータ(共振器直結型フィルタ回路)との関係

● gパラメータから求めたJインバータパラメータ

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{G_S b_1}{g_0 g_1}}$$

$$J_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \sqrt{\frac{b_i b_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\text{FBW}}{\Omega_c}} \sqrt{\frac{b_N G_L}{g_N g_{N+1}}}$$

外部Q値(入力側) $Q_{eS} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_0 g_1$

結合係数 $k_{i,i+1} = \frac{\text{FBW}}{\Omega_c} \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$

外部Q値(出力側) $Q_{eL} = \frac{\Omega_c}{\text{FBW}} g_N g_{N+1}$

● インライン型結合の規格化結合行列の要素

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{S1} & 0 & m_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 & m_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{NL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$$

規格化
結合係数

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{S1} = \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}} \\ m_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \\ m_{NL} = \frac{1}{\sqrt{g_N g_{N+1}}} \\ m_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right.$$

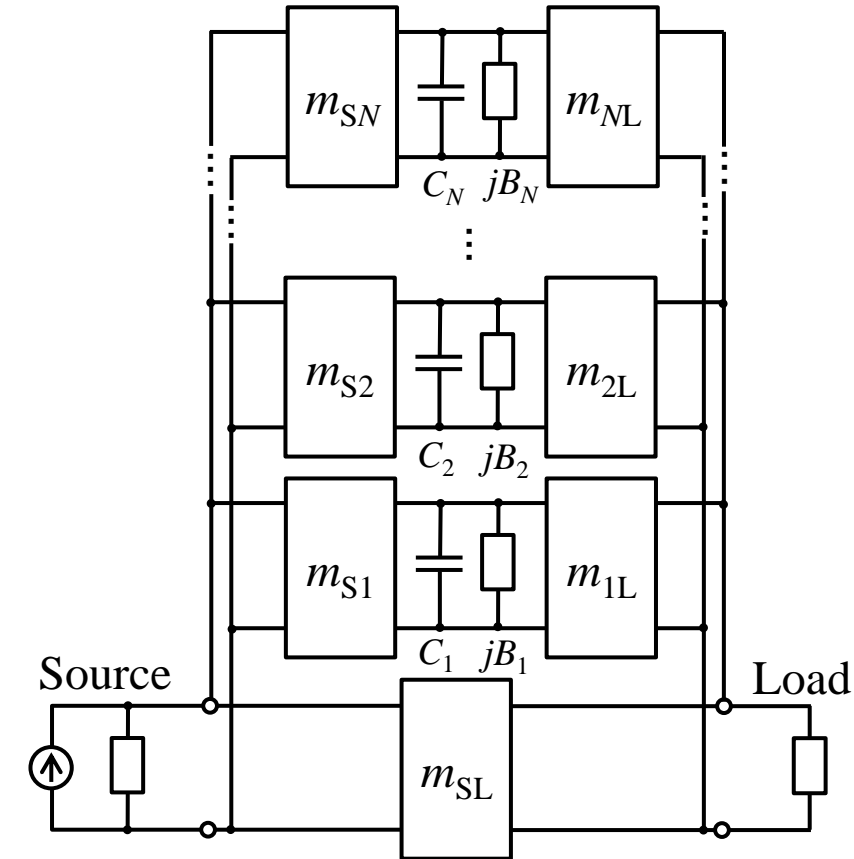
共振器並列型結合の原型LPF

■ 共振器並列型結合の原型LPF

- 結合共振器フィルタの汎用的な等価回路
 - 共振器並列型の結合トポロジーから他の結合トポロジーに変換できる.
- そのアドミタンス行列
 - **部分分数展開** (partial fraction expansion) の形

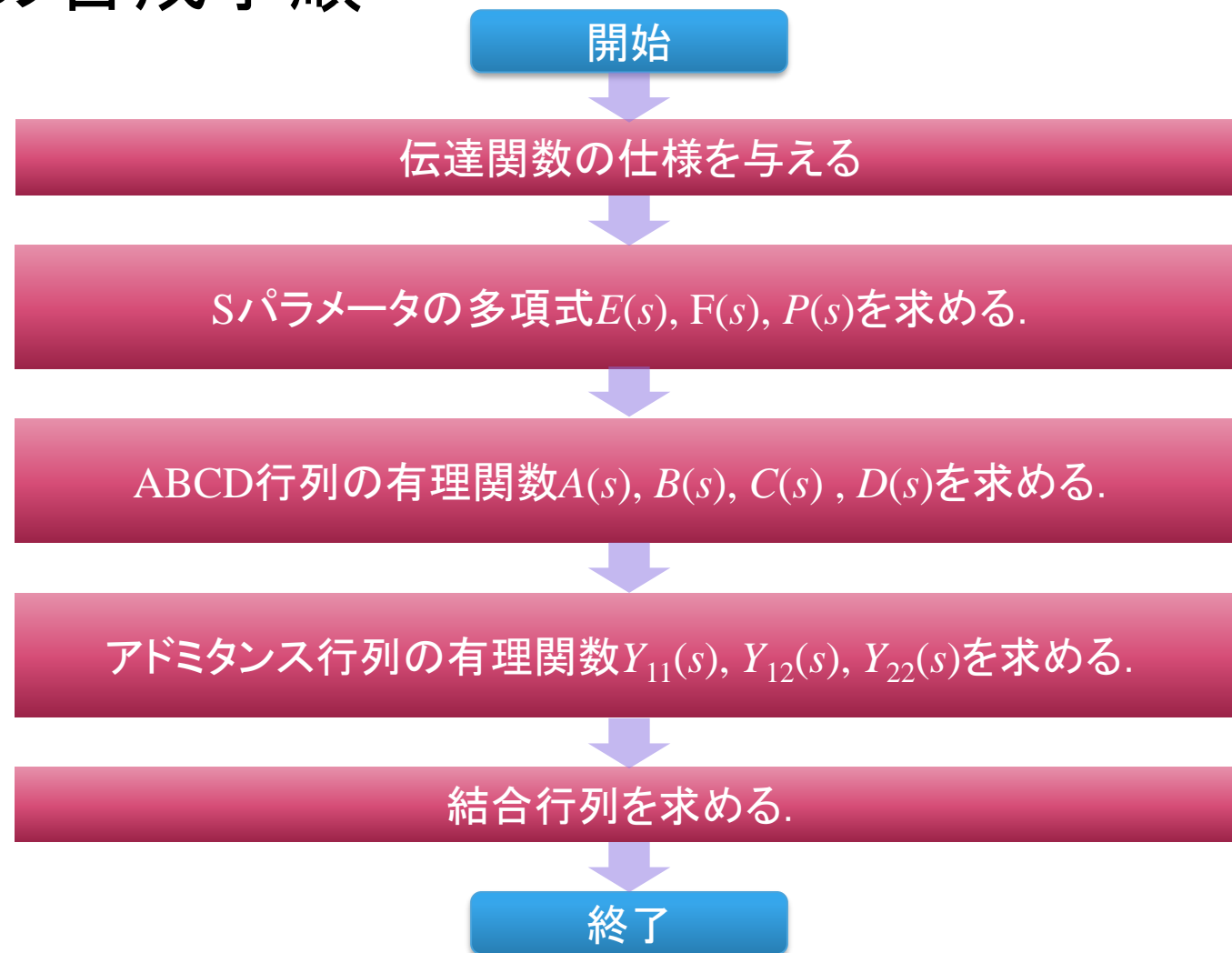
$$\begin{aligned}
 [Y] &= \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & jm_{SL} \\ jm_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s + jm_{ii}} \begin{bmatrix} m_{Si}^2 & m_{Si}m_{iL} \\ m_{Si}m_{iL} & m_{iL}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 一般化チェビシェフ関数を表すSパラメータの有理関数をアドミタンス行列[Y]に変換できれば, 共振器並列型の結合行列[M]が決定される.



【補足】 結合行列の合成方法 (1/3)

■ 結合行列の合成手順



【補足】 結合行列の合成方法 (2/3)

■ アドミタンス行列の構築

- ABCD行列 → アドミタンス行列への変換

$$\begin{aligned}
 [Y] &= \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_d(s)} \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{B(s)} \begin{bmatrix} D(s) & -\frac{\Delta_{ABCD}P(s)}{\epsilon} \\ -\frac{P(s)}{\epsilon} & A(s) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- $[Y]$ の各要素について部分分数展開 (極・留数形式)

$$[Y] = j \begin{bmatrix} 0 & d_0 \\ d_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s - jp_i} \begin{bmatrix} r_{11i} & r_{12i} \\ r_{21i} & r_{22i} \end{bmatrix}$$

- 共振器並列型の $[Y]$ と比較

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & jm_{SL} \\ jm_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s + jm_{ii}} \begin{bmatrix} m_{Si}^2 & m_{Si}m_{iL} \\ m_{Si}m_{iL} & m_{iL}^2 \end{bmatrix}$$

【補足】 結合行列の合成方法 (3/3)

■ 結合行列の算出

● 共振器並列型フィルタ回路の結合行列

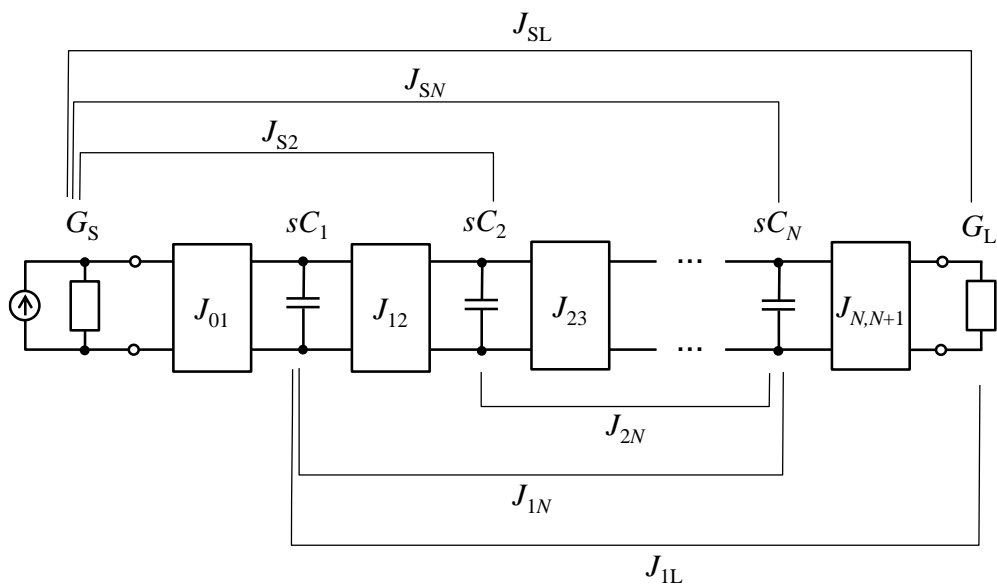
- 極・留数の結合行列の要素の関係

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{ii} = -p_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ m_{iL} = \sqrt{r_{22i}} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ m_{Si} = \frac{r_{21i}}{\sqrt{r_{22i}}} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ m_{SL} = d_0 \end{array} \right.$$



$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & m_{S3} & \cdots & m_{SN} & m_{SL} \\ m_{S1} & m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{1L} \\ m_{S2} & 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 & m_{2L} \\ m_{S3} & 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 & m_{3L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{SN} & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{NN} & m_{NL} \\ m_{SL} & m_{1L} & m_{2L} & m_{3L} & \cdots & m_{NL} & 0 \end{bmatrix}$$

共振器直結型と共振器並列型の関係



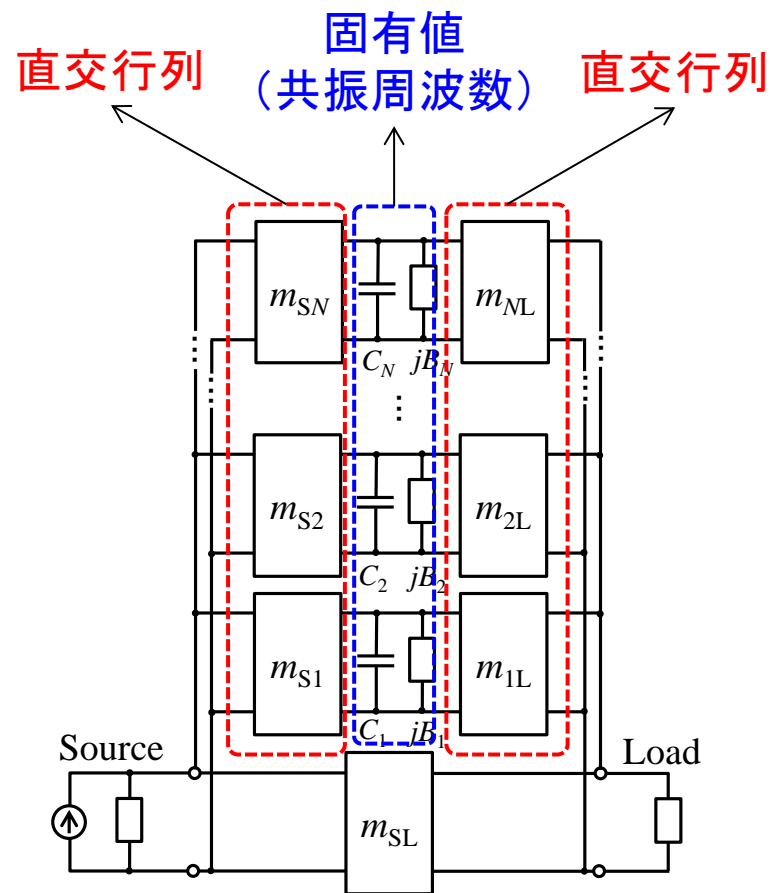
共振器直結型原型LPF

結合行列(実対称行列)

$$[M] = [T][A][T]^T$$

$[T]$: 直交行列

$[A] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$: 固有値



共振器並列型結合原型LPF

結合トポロジの変換



共振器直結型フィルタ回路の結合行列

$$[M] = \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & m_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline m_{01} & 0 & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1N} & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 & m_{23} & \cdots & m_{2N} & 0 \\ 0 & m_{13} & m_{23} & 0 & \cdots & m_{3N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{1N} & m_{2N} & m_{3N} & \cdots & 0 & m_{N,N+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{N,N+1} & 0 \end{array} \right]$$

: 実対称行列



行列の相似変換

固有値は不変
 固有ベクトルが変化

共振器並列型結合フィルタ回路の結合行列

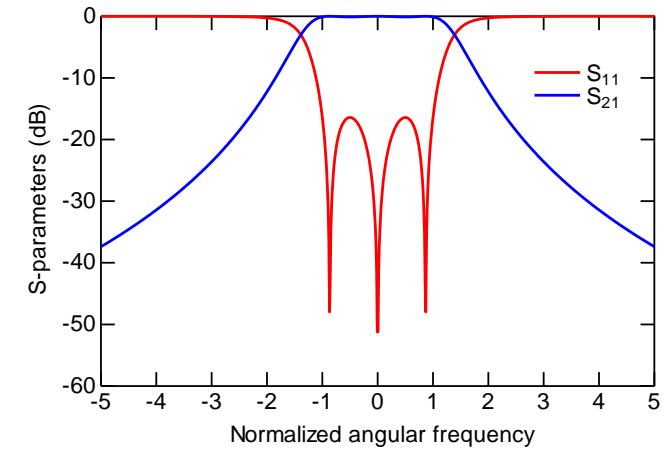
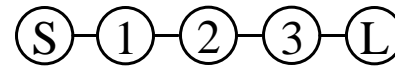
$$[M] = \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & m_{S1} & m_{S2} & m_{S3} & \cdots & m_{S,N} & 0 \\ \hline m_{S1} & m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{L1} \\ m_{S2} & 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 & m_{L2} \\ m_{S3} & 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 & m_{L3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{S,N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{NN} & m_{L,N} \\ \hline 0 & m_{L1} & m_{L2} & m_{L2} & \cdots & m_{L,N} & 0 \end{array} \right]$$

: 固有値行列

共振器3段の場合

対称な共振器直結型フィルタ回路(共振器3段)

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{01} & 0 & 0 & 0 \\ m_{01} & 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 & m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} & 0 & m_{01} \\ 0 & 0 & 0 & m_{01} & 0 \end{bmatrix}$$

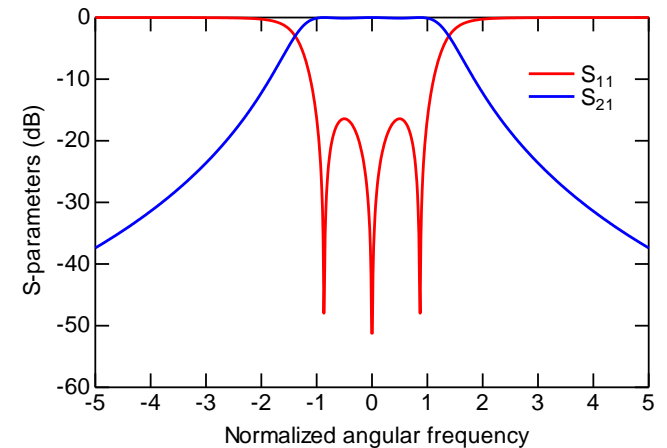
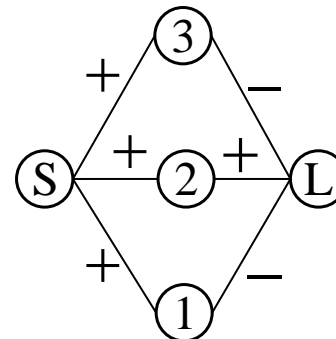


結合トポロジーの変換(手計算)

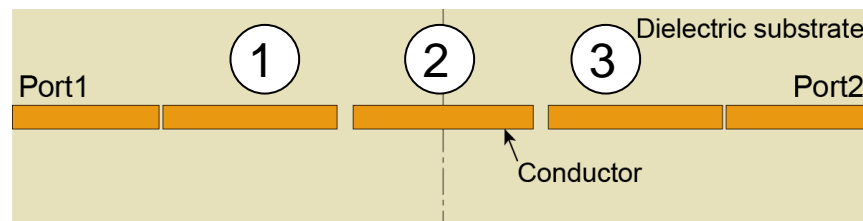
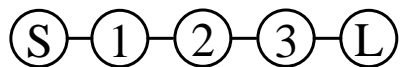
同じ周波数特性

共振器並列型結合フィルタ回路

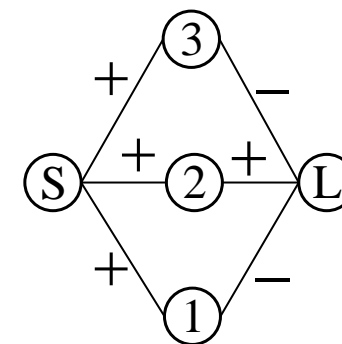
$$[M'] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{01}}{2} & \frac{m_{01}}{\sqrt{2}} & \frac{m_{01}}{2} & 0 \\ \frac{m_{01}}{2} & -\sqrt{2}m_{12} & 0 & 0 & -\frac{m_{01}}{2} \\ \frac{m_{01}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{01}}{\sqrt{2}} \\ \frac{m_{01}}{2} & 0 & 0 & \sqrt{2}m_{12} & -\frac{m_{01}}{2} \\ 0 & -\frac{m_{01}}{2} & \frac{m_{01}}{\sqrt{2}} & -\frac{m_{01}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



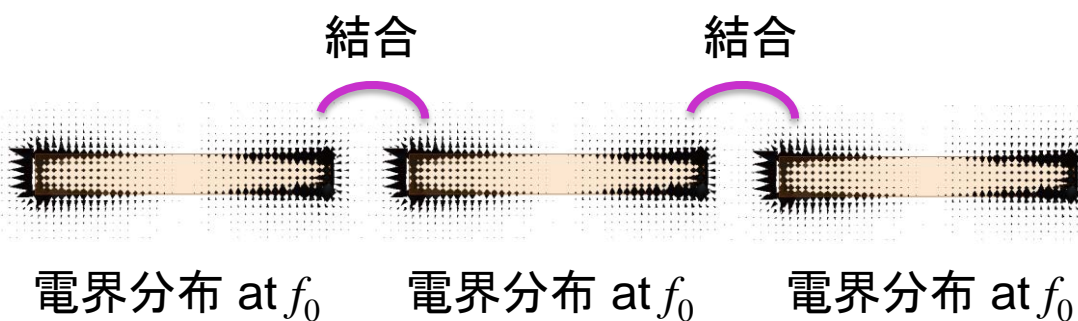
奇モード共振が2つ, 偶モード共振器が1つ



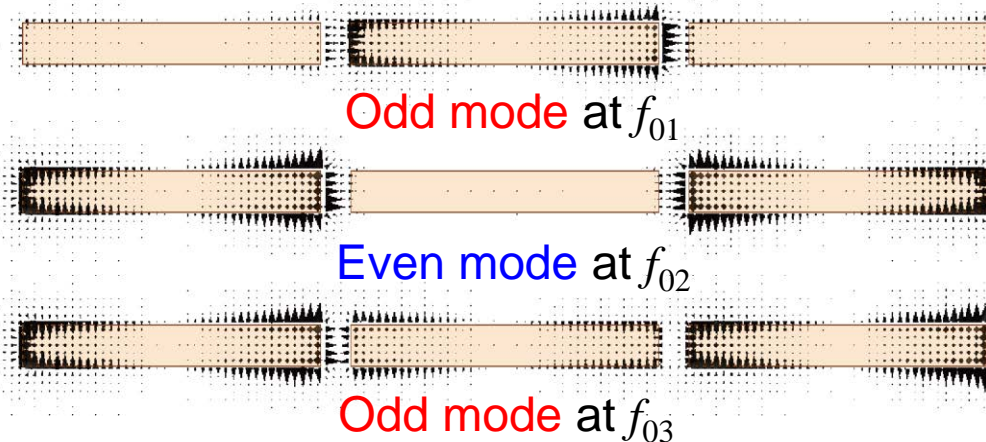
エッジ結合3段共振器直結形フィルタ回路



共振器直結型結合の物理的意味
= 3つの半波長共振器の結合



共振器並列型結合の物理的意味
= 1つの結合共振器の3つの共振モード



結合トポロジーの変換手法：相似変換

■ 行列の相似変換 (similarity transform) (=ギブンス回転)

- 不要な結合 (物理的にはない結合) に相当する結合行列の要素をゼロにするように, 回転行列 $[R]$ の回転角 θ とピボットを適切に選ぶ.
- Folded型結合など特定の結合トポロジーには, 変換手順がある (詳細は割愛).
- 注意: 数学的な変換のため, 必ずしも物理構造 (実際の結合) と完全に合致するとは限らない.

相似変換 $[M]_{r+1} = [R]_r [M]_r [R]_r^T \quad (r = 1, 2, \dots)$

回転行列 $[R]$ の一例 $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

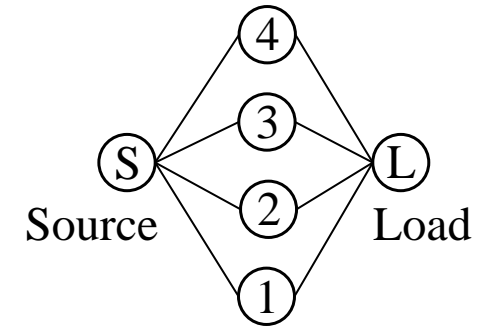
結合トポロジの変換の一例

■ Folded型への変換

● 共振器並列型の結合行列

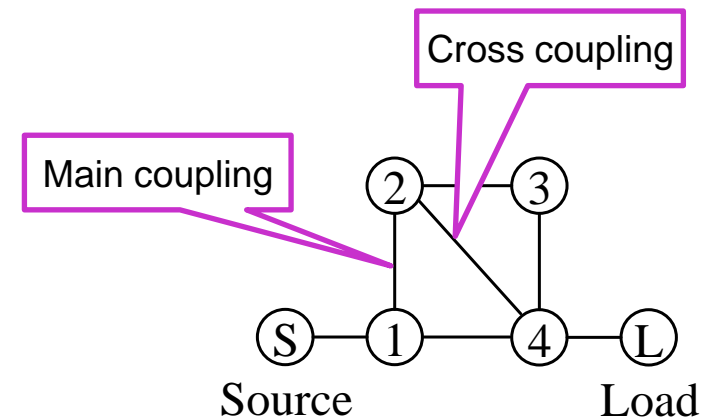
$$[M] = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & m_{S1} & m_{S2} & m_{S3} & m_{S4} & m_{SL} \\ \hline & m_{11} & 0 & 0 & 0 & m_{1L} \\ & & m_{22} & 0 & 0 & m_{2L} \\ & & & m_{33} & 0 & m_{3L} \\ & & & & m_{44} & m_{4L} \\ \hline & & & & & m_{SL} \end{array} \right]$$

赤: 0にしたい要素



● Folded型の結合行列

$$[M] = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & m_{S1} & 0 & 0 & 0 & m_{SL} \\ \hline & m_{11} & m_{12} & 0 & m_{14} & 0 \\ & & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ & & & m_{33} & m_{34} & 0 \\ & & & & m_{44} & m_{4L} \\ \hline & & & & & m_{SL} \end{array} \right]$$



【補足】結合トポロジーの変換：最適化手法

■ 相似変換の回転角の最適化

● 特定の結合トポロジー以外は最適化手法が有効

- 相似変換の対象： $(N+2) \times (N+2)$ の結合行列 $[M]$
- r 番目の回転行列 $[R(\theta_r)]$
 - ピボット：非対角要素 (i, j) (ただし, $i < j, i \neq j, i, j \neq 1, N+2$)
 - 回転角： θ_r
- 最適化変数
 - 回転角： θ_r ($r=1, 2, \dots, r_{\max}$)
 - 変数の数： $r_{\max} = N(N-1)/2$
- 目的関数
 - 目的の結合トポロジーの結合行列 $[M_{\text{obj}}]$ でゼロにしたい要素 (k, ℓ) の大きさ $|[M_{\text{obj}}]_{k,\ell}| = 0$
 - ここで,

$$[M_{\text{obj}}] = [R(\theta_{r_{\max}})] \cdots [R(\theta_2)][R(\theta_1)][M][R(\theta_1)]^T [R(\theta_2)]^T \cdots [R(\theta_{r_{\max}})]^T$$

● 注意

- 損失を含む場合は、結合行列は複素数となる。
- 回転行列の三角関数も複素三角関数。回転角も複素数。

初期値となる共振器並列型

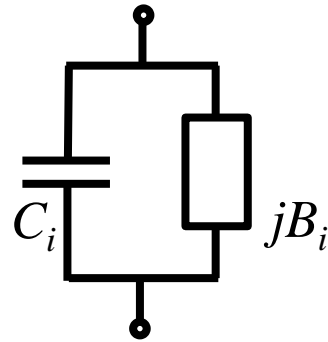
$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & m_{S1} & m_{S2} & m_{S3} & \cdots & m_{S,N} & 0 \\ m_{S1} & m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{L1} \\ m_{S2} & 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 & m_{L2} \\ m_{S3} & 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 & m_{L3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{S,N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{NN} & m_{L,N} \\ 0 & m_{L1} & m_{L2} & m_{L2} & \cdots & m_{L,N} & 0 \end{bmatrix}$$

【補足】 共振器の損失係数

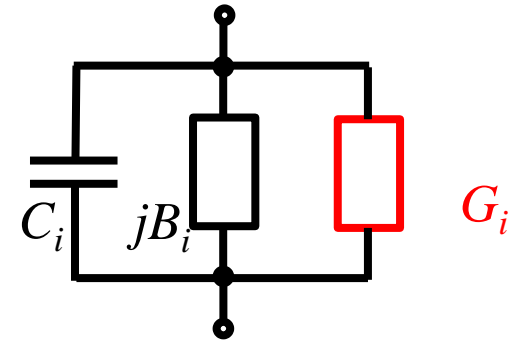
■ 損失がある場合の原型LPFの共振器

● 損失係数 (dissipation factor) δ の導入

- 規格化結合行列の対角項 m_{ii} に $-j\delta_i$ を追加するだけでよい (LPF, BPFの場合).
- あるいは, 複素角周波数を $s \rightarrow s + \delta_i$ とするだけでよい.



損失なしの共振器



損失ありの共振器

サセプタンス

$$sC_i + jB_i$$

$$sC_i + jB_i + G_i$$

規格化サセプタンス

$$s + \frac{jB_i}{C_i} = s + jm_{ii}$$

$$s + \frac{jB_i}{C_i} + \frac{G_i}{C_i} = s + j(m_{ii} - j\delta_i)$$

【補足】共振器の無負荷Q値

■ 損失係数を用いた*i*番目の共振器の無負荷Q値 $Q_{u,i}$

● 原型LPF

- $|jB_i|$ が C_i に比べて十分小さいとすると, 遮断角周波数 Ω_c において,

$$Q_{u,i} = \frac{\Omega C_i}{G_i} = \frac{\Omega}{\delta_i} \xrightarrow{\Omega=\Omega_c} Q_{u,i} = \frac{\Omega_c}{\delta_i} = \frac{1}{\delta_i}$$

● BPF

- 共振角周波数が中心角周波数 ω_0 の近傍とすると, 近似的に ω_0 において,

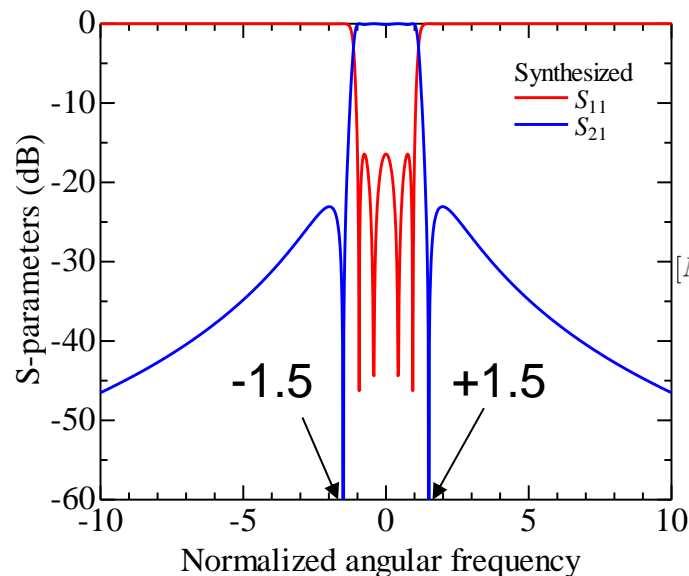
$$Q_{u,i} = \frac{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Omega_c C_i}{G_i} = \frac{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\delta_i} \xrightarrow{\omega=\omega_0} Q_{u,i} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \frac{1}{\delta_i}$$

- 例) $\delta=0.2$, 比帯域幅 5% のとき, $Q_u = \frac{1}{0.2 \times 0.05} = 100$

有極BPFの設計例

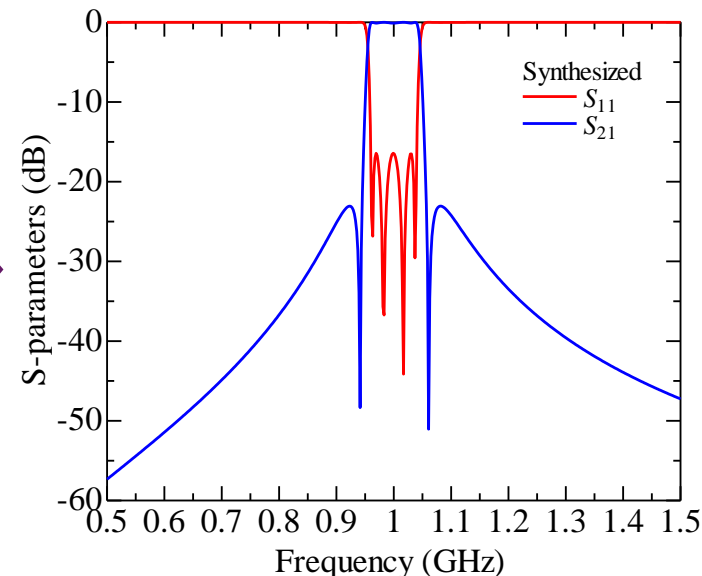
設計仕様

- 段数 N 4
- 中心周波数 f_0 1.0 GHz
- 比帯域幅 FBW 8%
- 帯域内反射損失 L_R 16.43 dB
- 伝送零点周波数 f_{TZ} 0.94 GHz, 1.61 GHz (原型LPFでは±1.5)

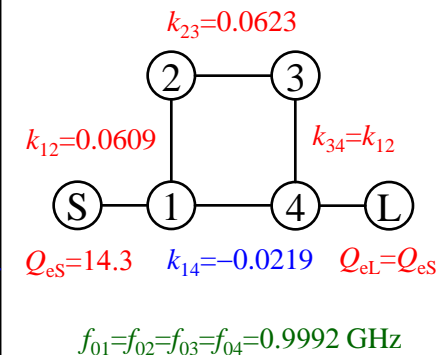


原型LPF (伝送零点を対称配置)

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0.9348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9348 & 0 & 0.7606 & 0 & -0.2734 & 0 \\ 0 & 0.7606 & 0 & 0.7777 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7777 & 0 & 0.7606 & 0 \\ 0 & -0.2734 & 0 & 0.7606 & 0 & 0.9348 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9348 & 0 \end{bmatrix}$$



BPFの理論特性

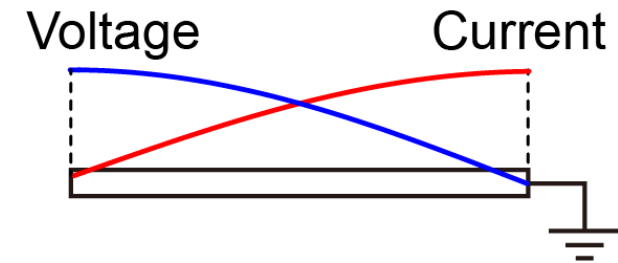
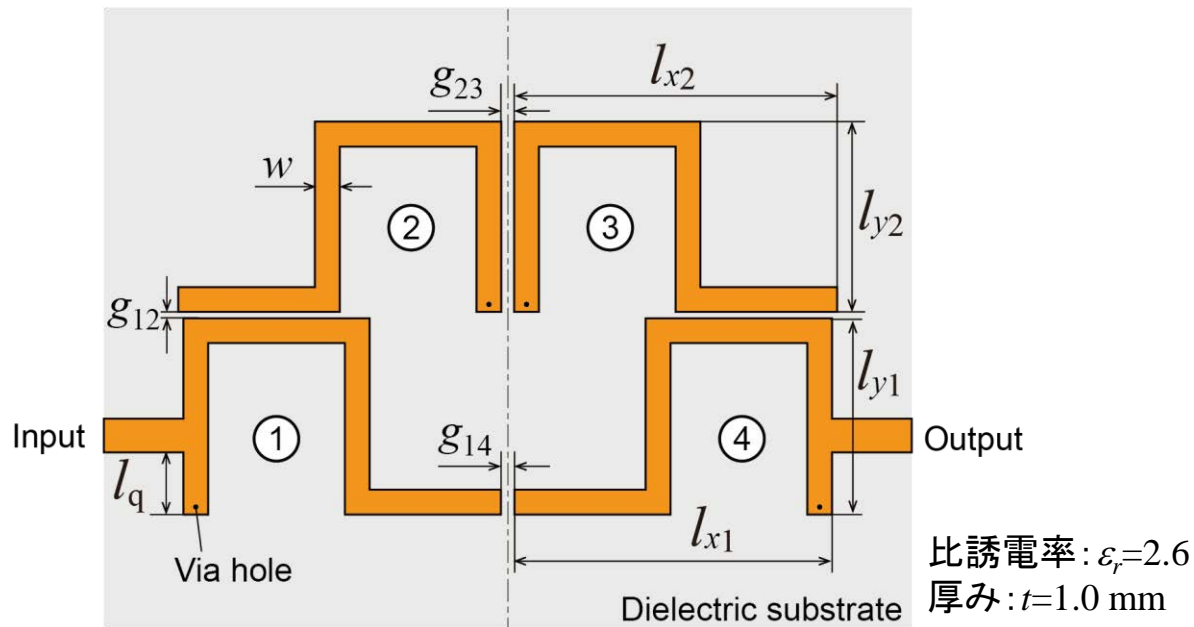


有極BPFの構造

■ Folded結合の有極BPF

● 4つの1/4波長共振器を使用

- 磁界結合(正結合): 磁界最大点どうしを結合
- 電界結合(負結合): 電界最大点どうしを結合

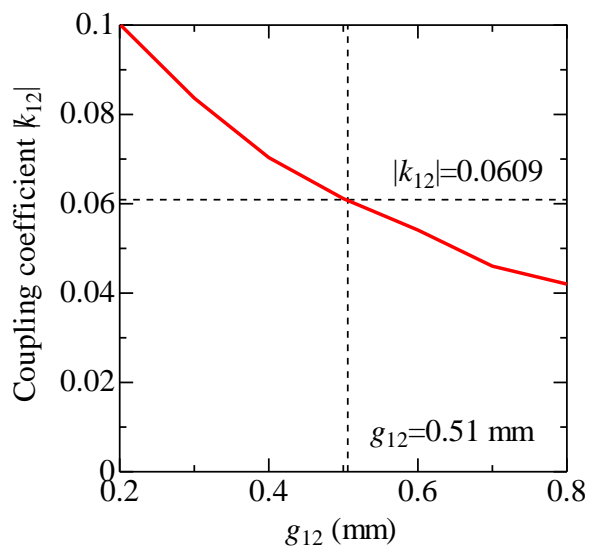


設計対象のマイクロストリップBPFの構造

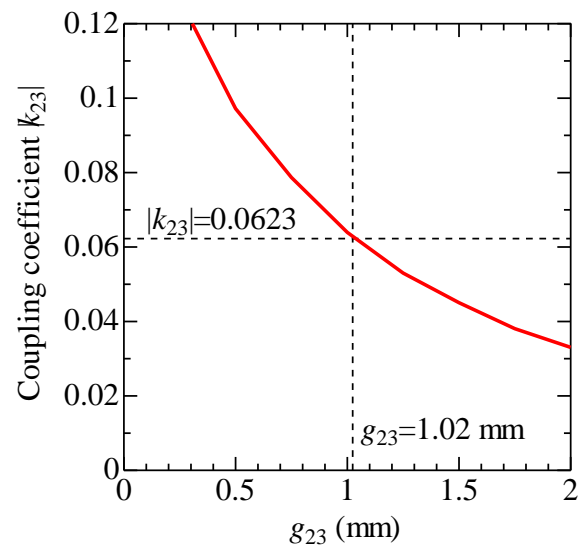
一端短絡・一端開放の1/4波長共振器

■ 結合係数・外部Q値の個別設計

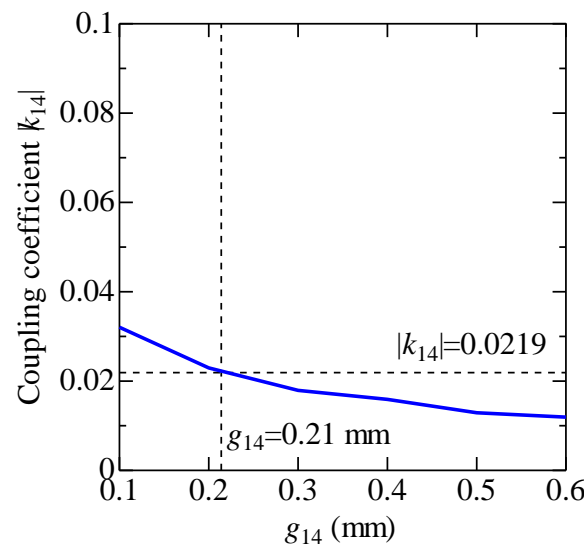
- 無極フィルタと同じ方法で構造パラメータを一つずつ設計
- これらを構造パラメータの初期値とする。



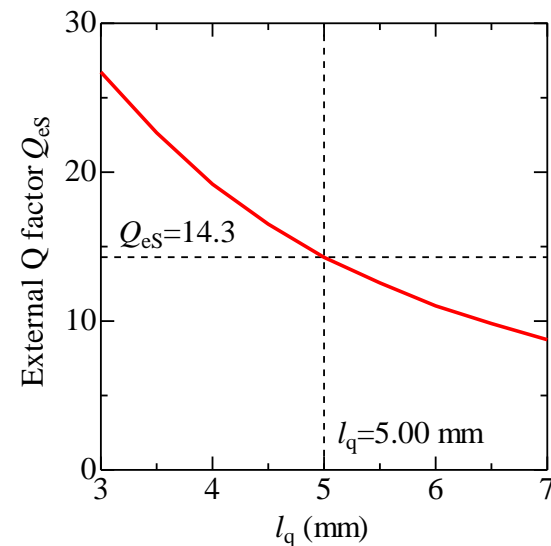
結合係数 k_{12}



結合係数 k_{23}



結合係数 k_{14}



外部Q値 Q_{es}

結合行列抽出法

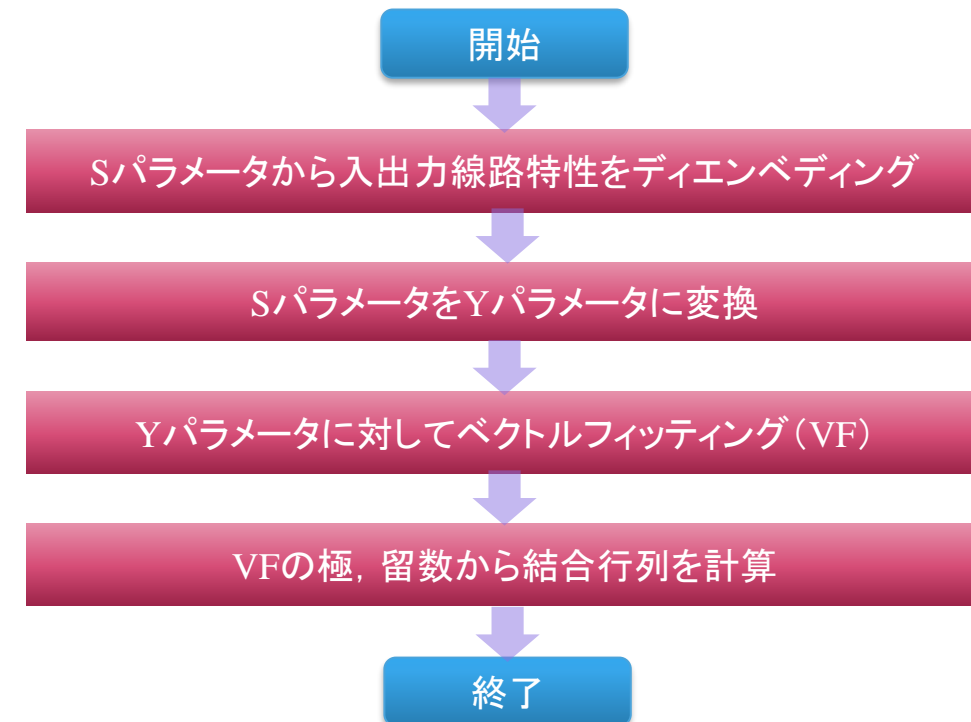
■ 結合行列抽出法 (coupling-matrix extraction method)

- フィルタの周波数特性 (Sパラメータ) から結合行列を抽出する手法
- 結合係数や外部Q値の評価式では評価できない場合, つまり複数の共振器の結合状態においても結合係数や共振周波数を評価可能

● ベクトルフィッティング法を使用 (Vector fitting method)

- 複素有理関数 (極・留数表現) に対するカーブフィッティング手法の一つ

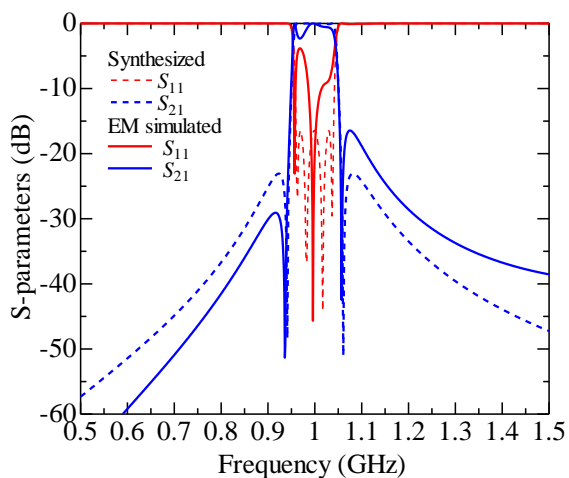
$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s - p_i} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$



構造パラメータの調整

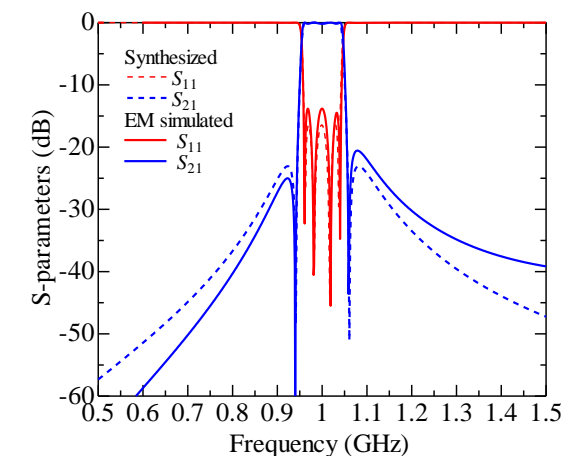
■ 結合行列抽出法を用いてBPFの結合行列を抽出

- 共振器は結合すると、共振器単体設計時の共振周波数から変化
- 設計途中のBPFの結合行列を抽出し、構造パラメータを微調整



前々ページの構造パラメータの初期値での周波数特性

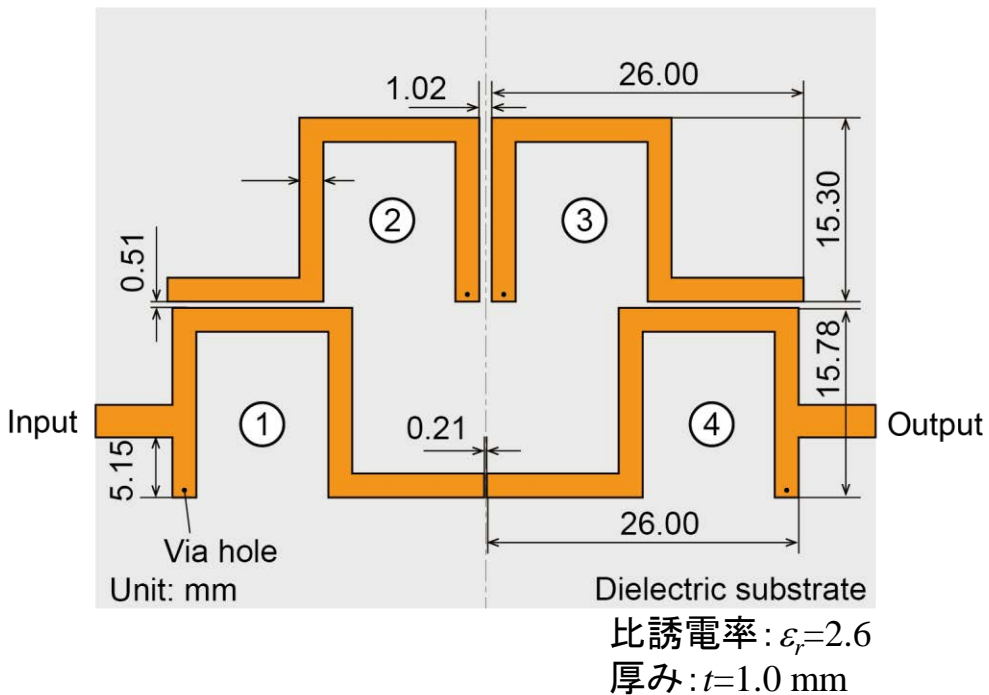
[M]の要素	目標値	初期値	調整1後	調整2後	調整3後
f_{01} (GHz)	0.9992	1.0168	1.0666	1.0011	1.0000
f_{02} (GHz)	0.9992	0.9968	0.9988	0.9993	0.9998
k_{12}	0.0609	0.0603	0.0601	0.0604	0.0602
k_{23}	0.0623	0.0645	0.0644	0.0644	0.0643
k_{14}	-0.0219	-0.0232	-0.231	-0.0232	-0.0231
Q_{eS}	14.3	14.88	15.24	15.38	15.47



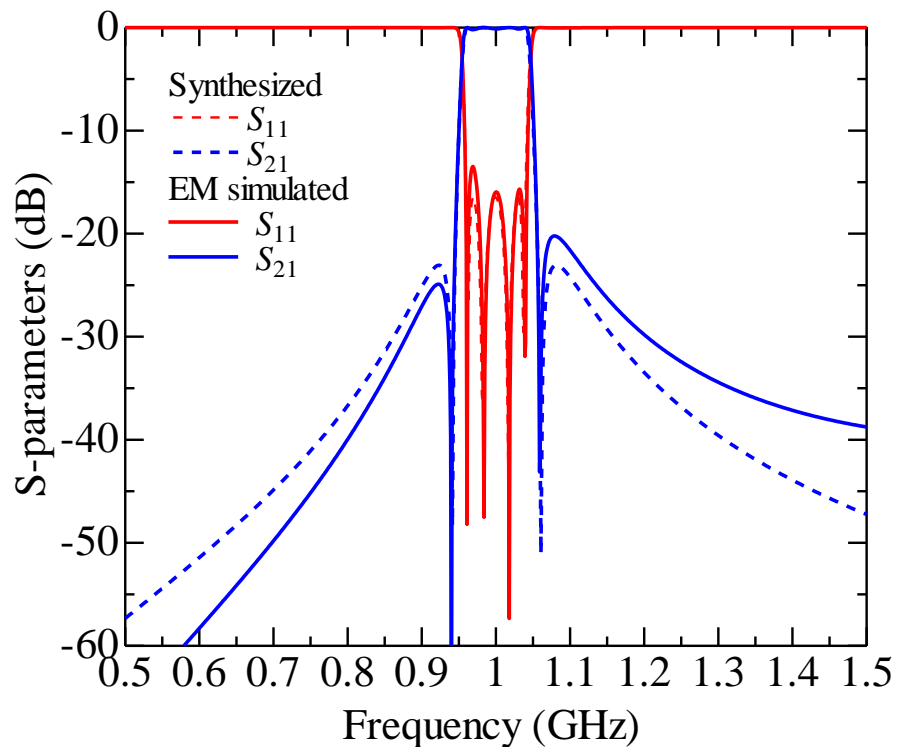
構造パラメータの調整後の周波数特性

構造パラメータ	初期値	調整量	調整量	調整量
l_{y1} (mm)	15.38	+0.36	+0.11	+0.03
l_{y2} (mm)	15.38	-0.05	-0.02	-0.01

有極BPFの設計結果



設計した有極BPFの構造



設計した有極BPFの周波数特性

[M]の要素	目標値	設計値
f_{01} (GHz)	0.9992	1.0003
f_{02} (GHz)	0.9992	0.9998
k_{12}	0.0609	0.0602
k_{23}	0.0623	0.0643
k_{14}	-0.0219	-0.0232
Q_{eS}	14.3	14.7

發展編

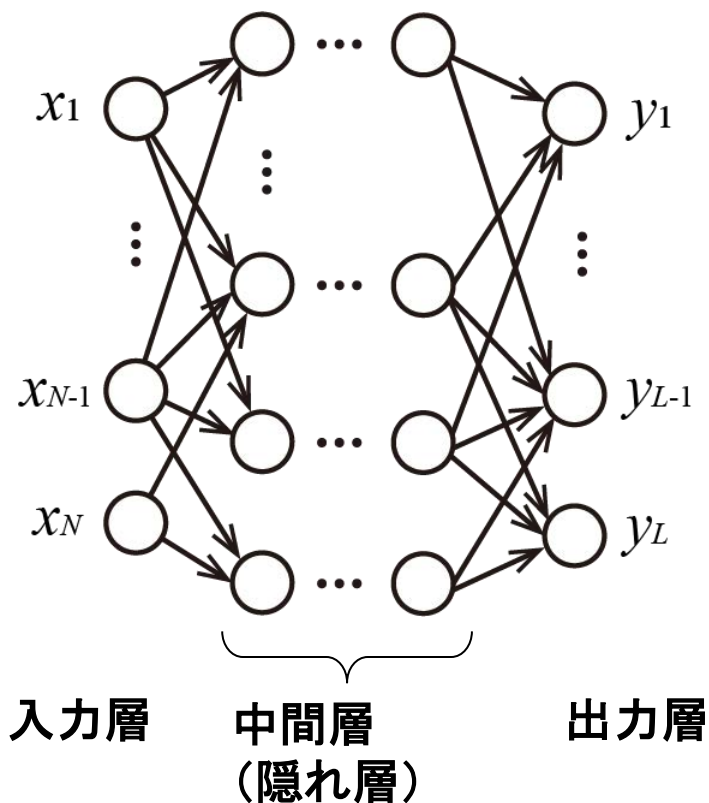
発展編：目次

- ニューラルネットワークと教師あり学習
- マイクロ波フィルタ設計とその課題
- 順モデルと逆モデル
- 順・逆モデルを用いた高速フィルタ設計
 - 学習データの生成
 - 順・逆モデルの構築
 - フィルタ設計例

ニューラルネットワーク

■ ニューラルネットワーク (Neural Network)

- 任意の入出力を持つデータを学習してその関係を表現
- 入出力間の計算が高速

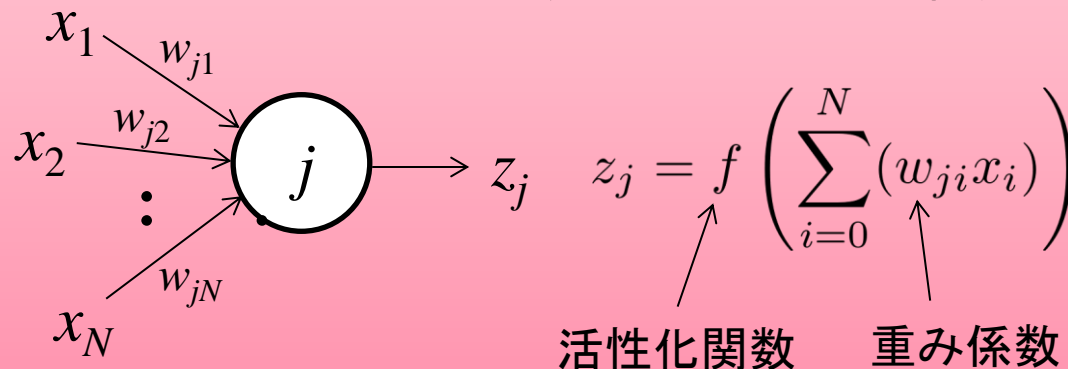


ハイパーパラメータ: 層構成, ノード数, 活性化関数など
学習: ノードの重み係数, バイアスの決定 (誤差逆伝搬法)

損失関数の最小化
 = 学習

$$E = \sum_{i=0}^L (r_i - y_i)^2$$

教師データ NN出力

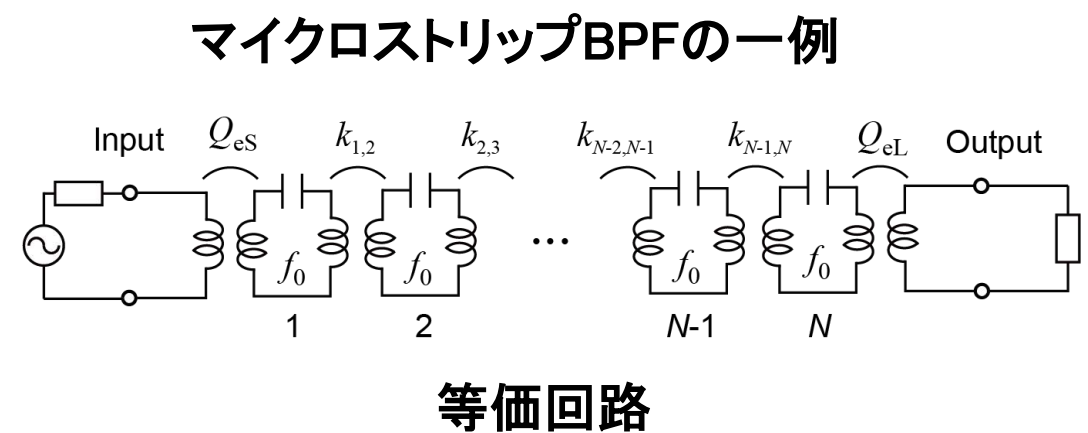
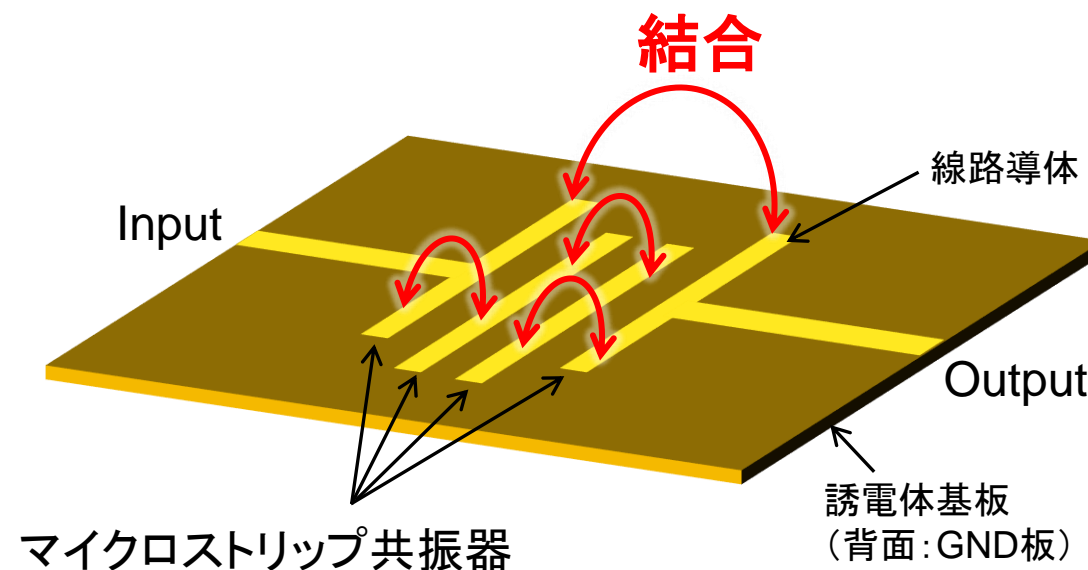
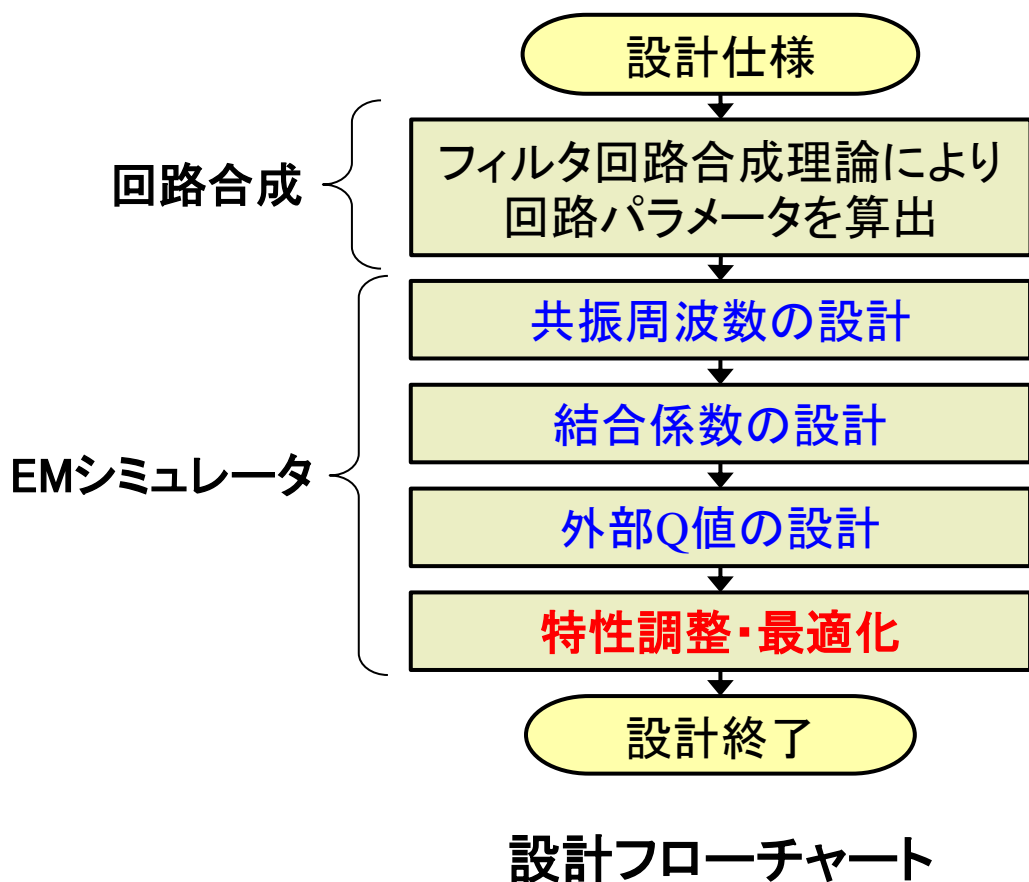


■ 教師あり学習 (supervised learning)

- 教師データとして, ラベル付きの正解データ(入力ベクトル x , 出力ベクトル y)を与えて, NNを構築すること
 - 例) 犬・猫の判別, 数字の文字認識
- NNにおけるデータの種別
 - 訓練データ (training data)
 - NNの構築に用いられるデータ
 - 検証データ (validation data)
 - 構築中のNNの精度の検証に用いられるデータ
 - 訓練データとは異なるデータを用意
 - テストデータ (test data)
 - 学習済みのNNの汎化性能をテストするのに用いられるデータ

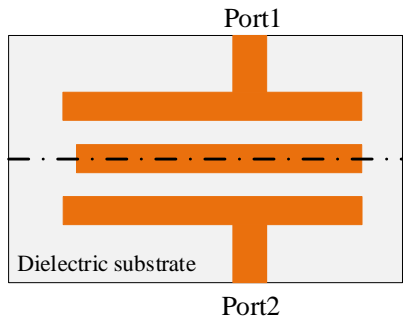
■ 帯域通過フィルタ

- 共振器 + 結合 = 通過域を形成

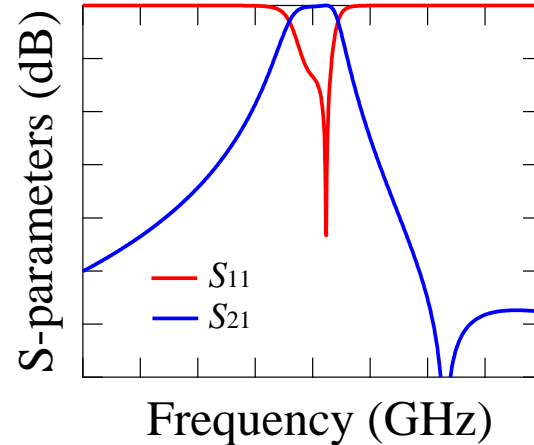


マイクロ波フィルタ設計の課題

■ 特性調整は，設計者の知識・経験に大きく依存



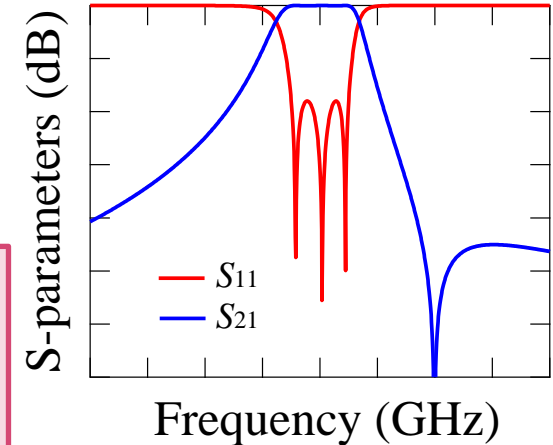
マイクロストリップBPF



初期設計



最適化手法か設計者自身による構造パラメータの調整

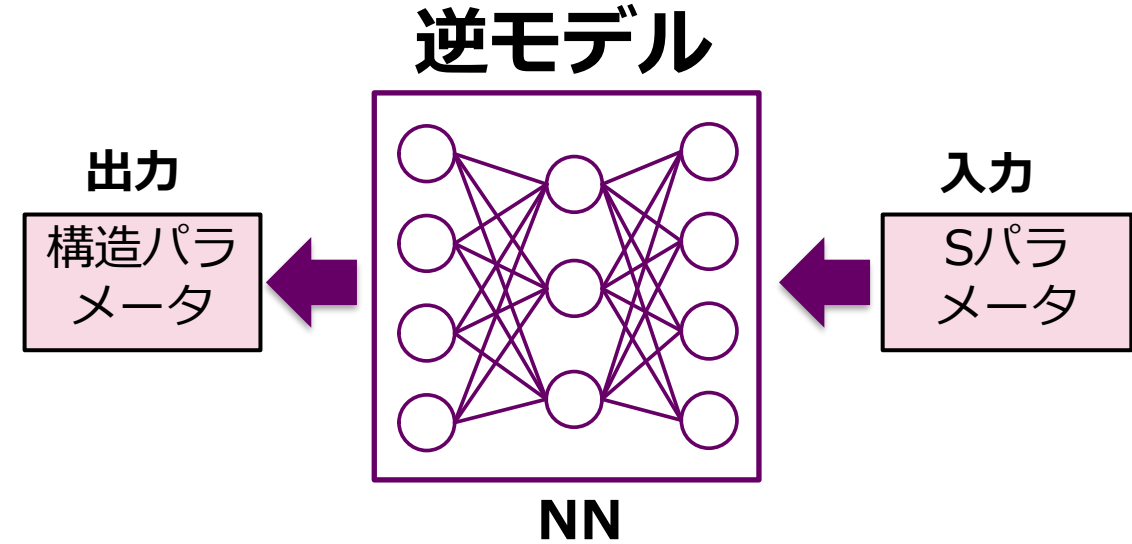
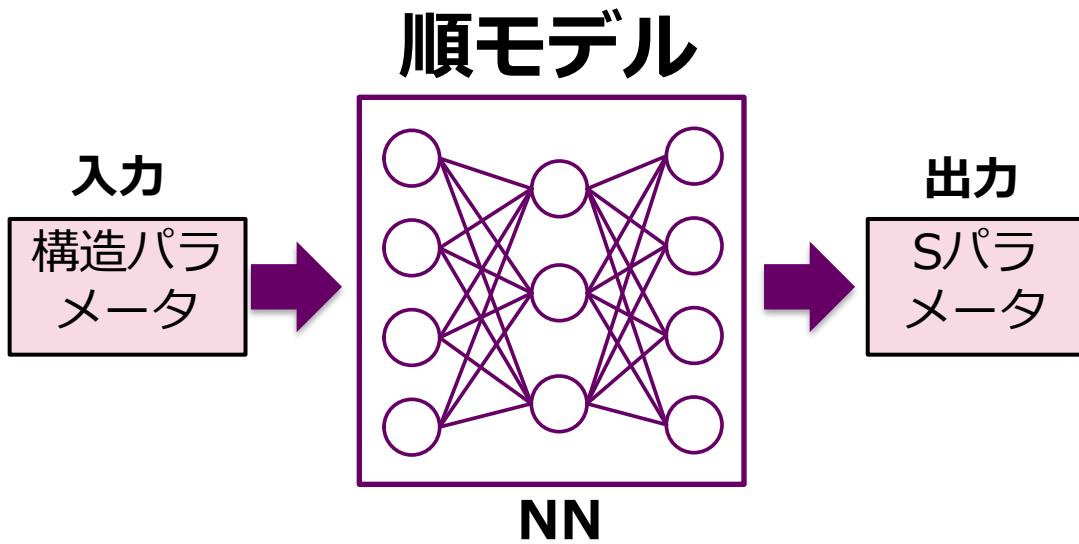


特性調整後

■ 着眼点

- 煩雑な設計にはAI/ML(人工知能AI:artificial intelligence, 機械学習 ML:machine learning)が有効

順モデルと逆モデル



■ 順モデル (forward model)

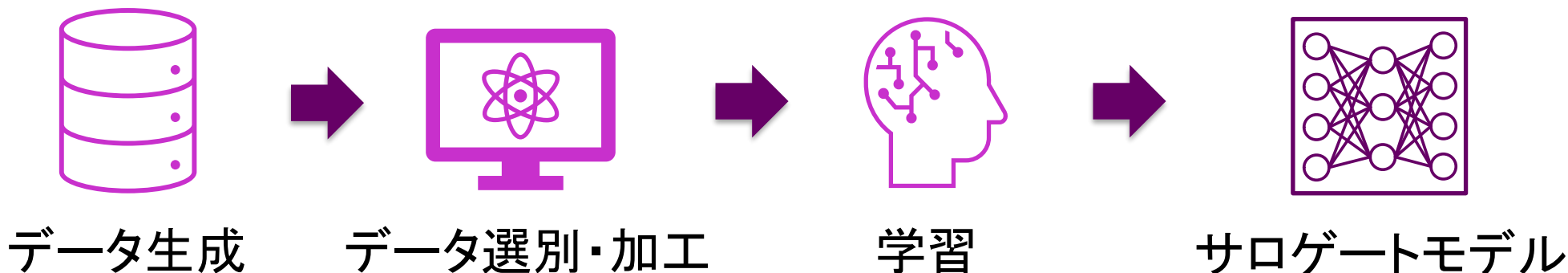
- EMシミュレータの代理モデル (surrogate model)
- 決まった構造であれば, 高速な特性計算が可能
- ただし, 教師データが必要

■ 逆モデル (inverse model)

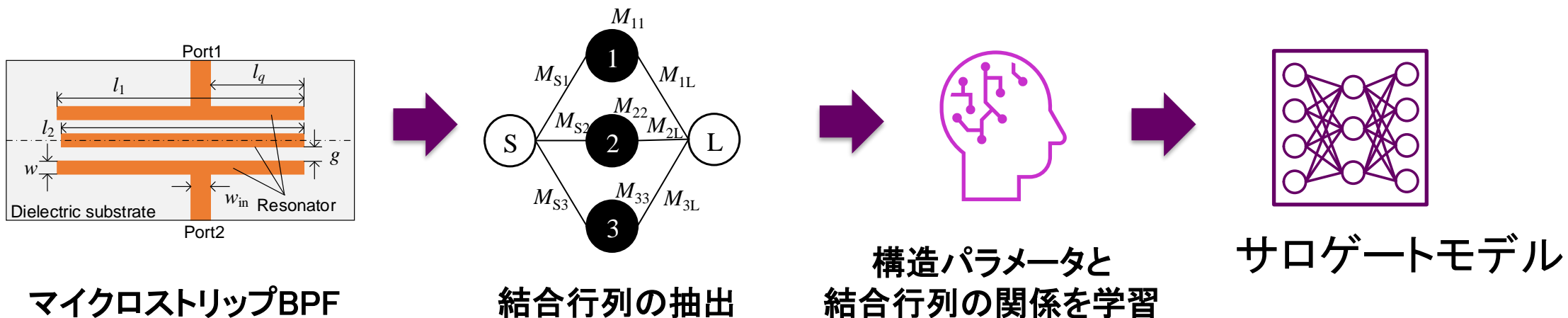
- 構造パラメータ設計の代理モデル
- 決まった構造であれば, 特性を入力すると構造パラメータ (の最適値に近い値) を出力
- ただし, 教師データが必要

サロゲートモデルの構築方法

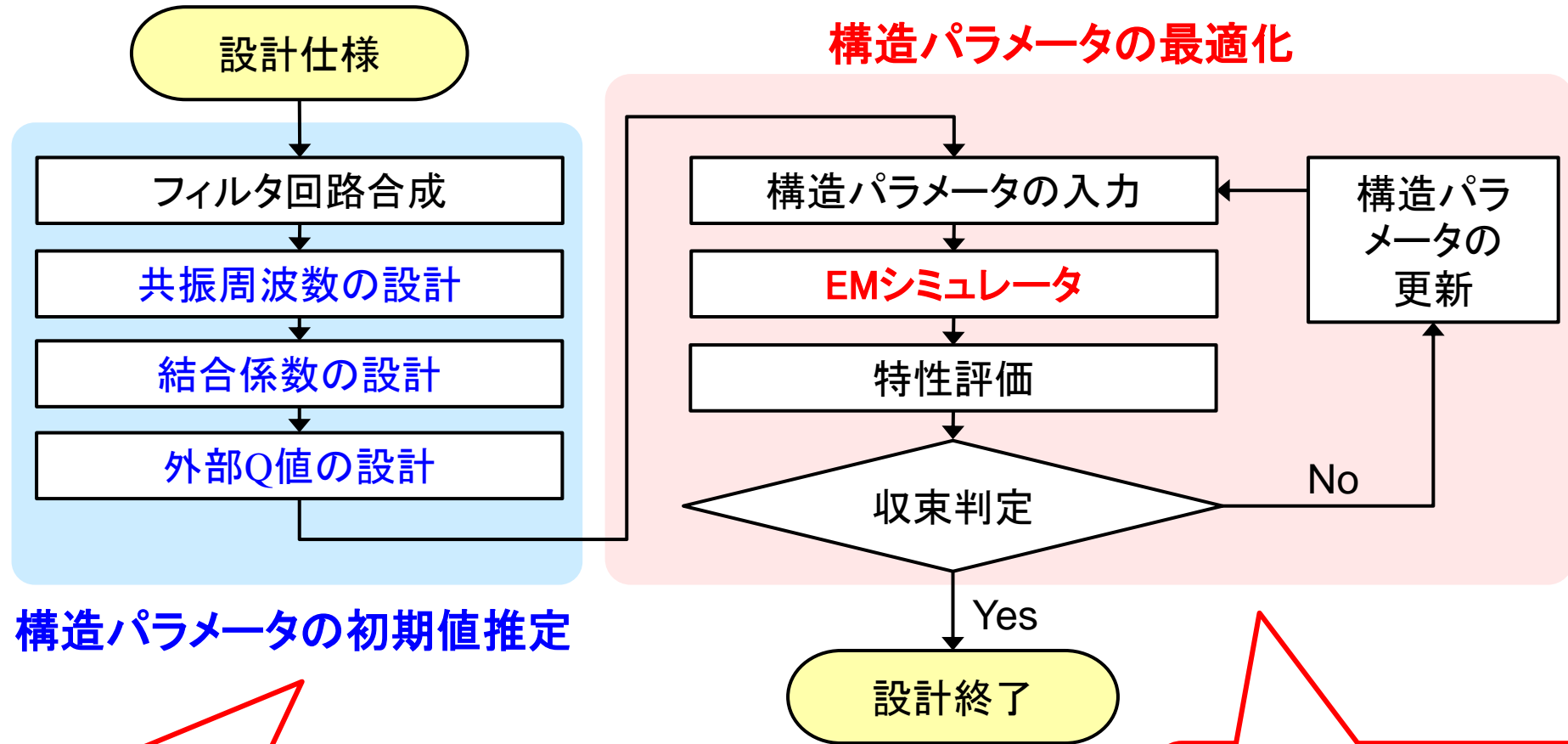
■ サロゲートモデル (surrogate model: 代理モデル) の構築フロー



■ BPFの順モデルの場合



BPFの一般的な最適化設計



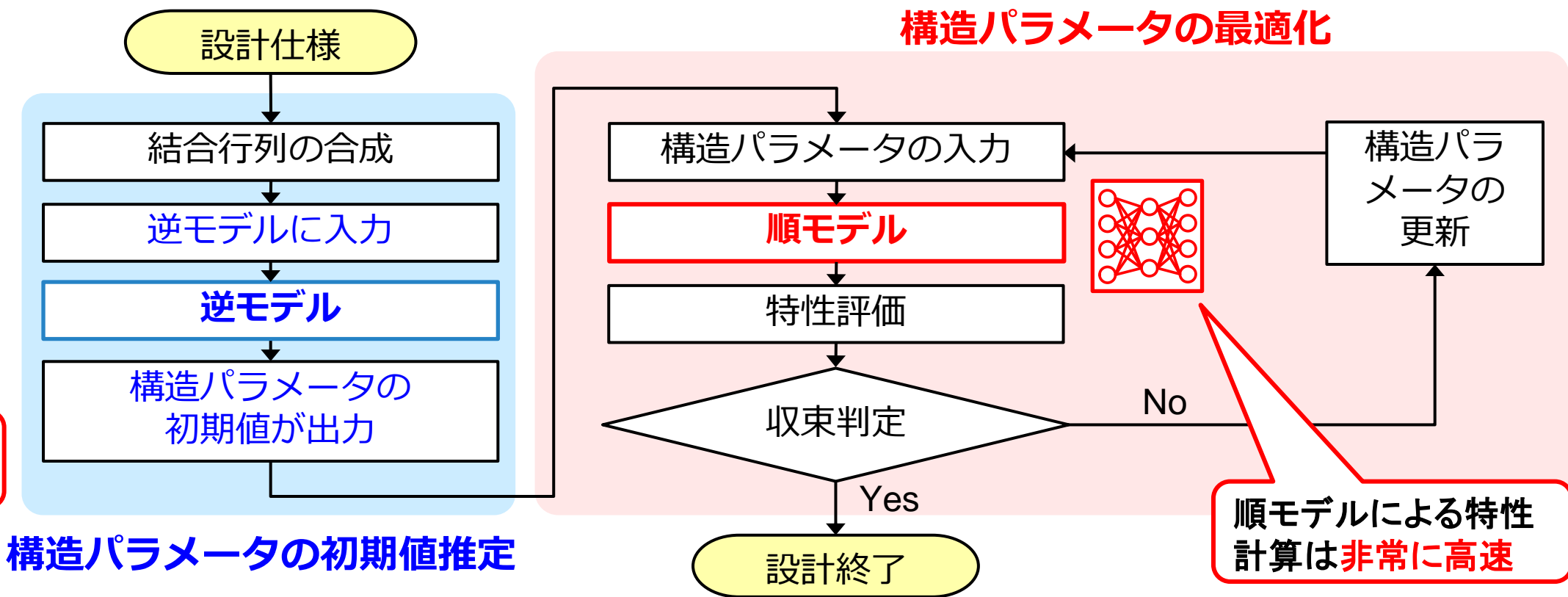
構造パラメータの初期値推定

初期値は設計者がマニュアルで適切に選択する

EMシミュレーションに時間を要する

順・逆モデルベースの高速最適化設計

- 利点: 超高速!
- 欠点: 教師データの範囲内でのみ利用可能



NN構築のためのデータセットの生成

■ 順・逆モデルで同一のデータセットを使用

構造パラメータ	変化範囲(mm)
l_1	33.0 - 35.0
l_2	33.0 - 35.0
l_3	33.0 - 35.0
g_1	1.5 - 4.0
g_2	1.5 - 4.0
l_q	11.0 - 13.0

※ 設計仕様から共振器長などのあたりを付けて変化範囲を決める

EMシミュレータの
パラメータスイープ
&
結合行列抽出

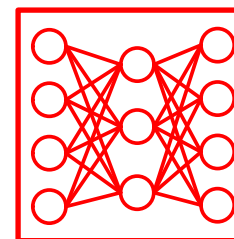
データ
セットの
生成

データセット
(構造パラメータと結合行列)

- 教師データ: 6300
- 検証データ: 2000

順モデル

Input
(6 structural
parameters)

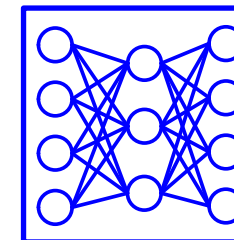


1 hidden layer
60 nodes
Sigmoid

Output
(10 coupling
matrix
elements)

逆モデル

Input
(10 coupling
matrix
elements)

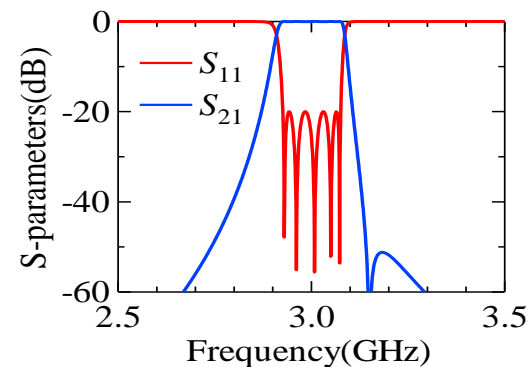


1 hidden layer
70 nodes
Sigmoid

Output
(6 structural
parameters)

設計仕様

- 段数 N 5
- 中心周波数 f_0 3.0 GHz
- 比帯域幅 FBW 5%
- 帯域内反射損失 R_L 20 dB
- 伝送零点周波数 f_{TZ} 3.15 GHz



結合行列の合成

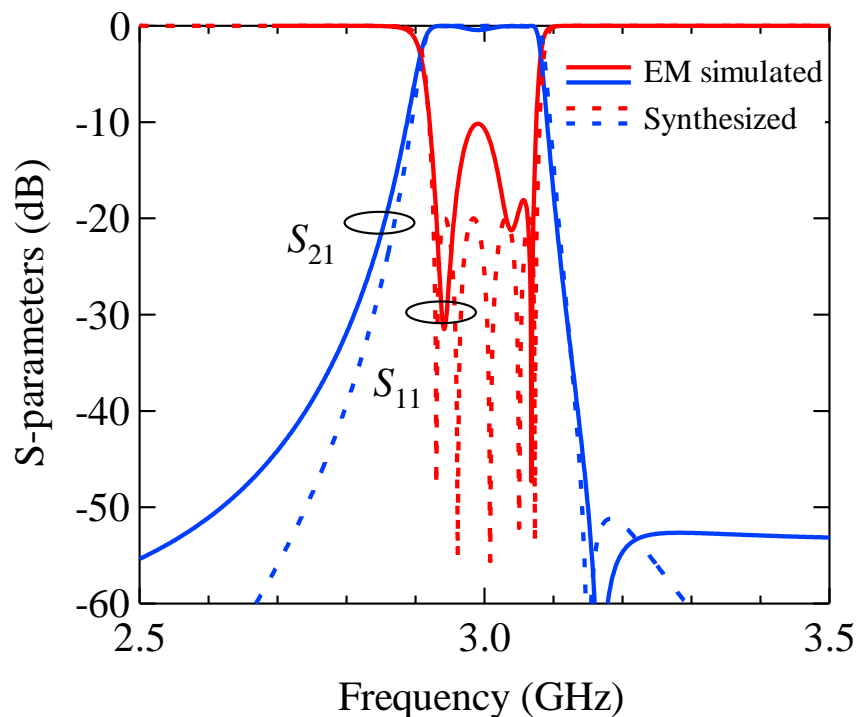
M_{S1}	M_{S2}	M_{S3}	M_{S4}	M_{S5}	M_{11}	M_{22}	M_{33}	M_{44}	M_{55}
0.374	0.521	0.317	0.537	0.474	1.276	-0.172	-1.206	0.783	-0.957

逆モデルによる初期値推定

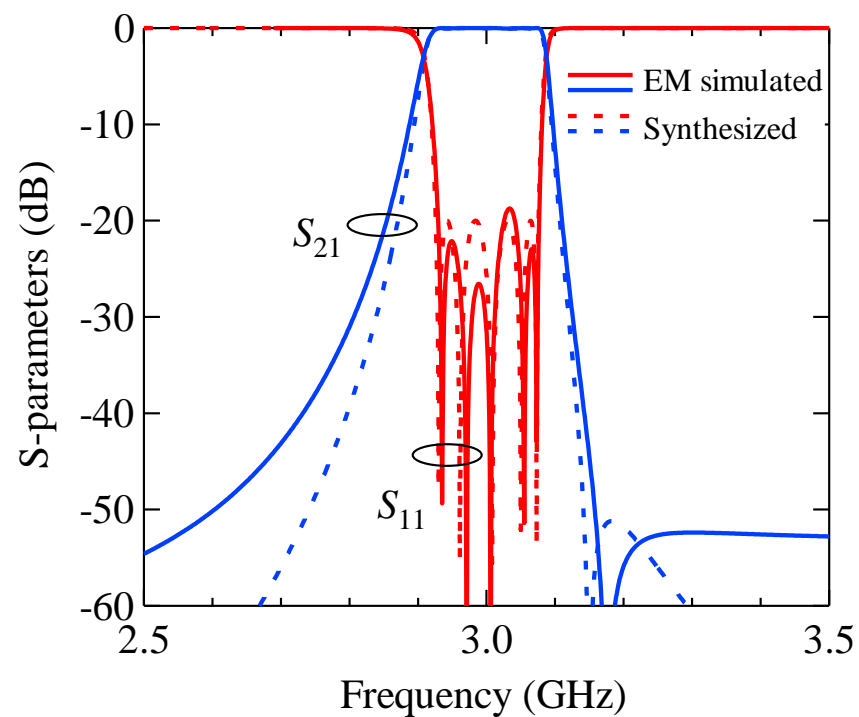
l_1 (mm)	l_2 (mm)	l_3 (mm)	g_1 (mm)	g_2 (mm)	l_q (mm)
34.05	33.55	33.40	2.15	3.25	12.80

順モデルを用いた最適化

l_1 (mm)	l_2 (mm)	l_3 (mm)	g_1 (mm)	g_2 (mm)	l_q (mm)
34.05	33.45	33.45	2.15	3.10	12.70



初期値における
電磁界シミュレーション結果



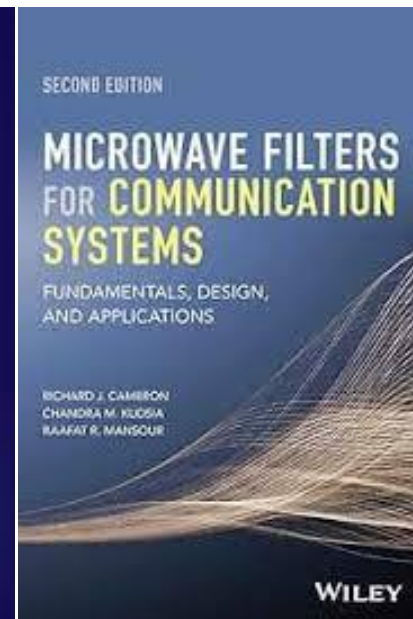
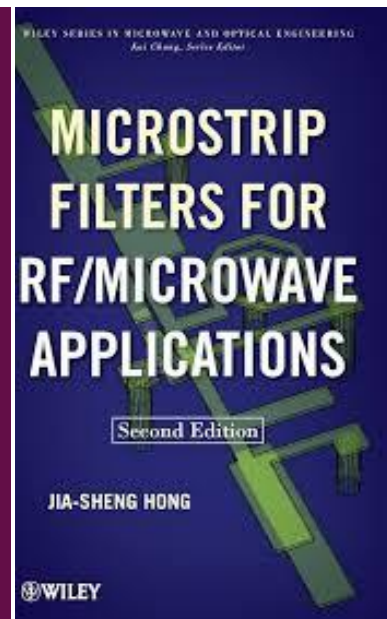
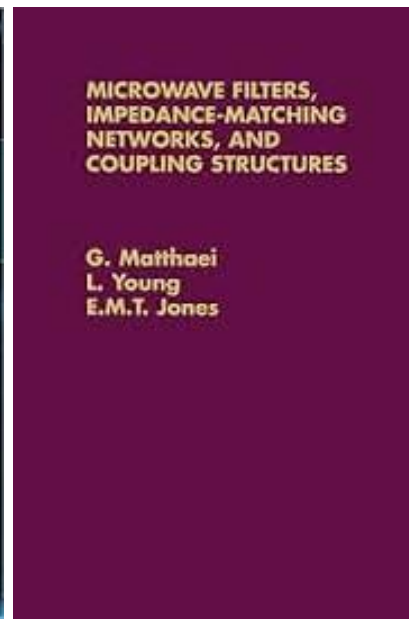
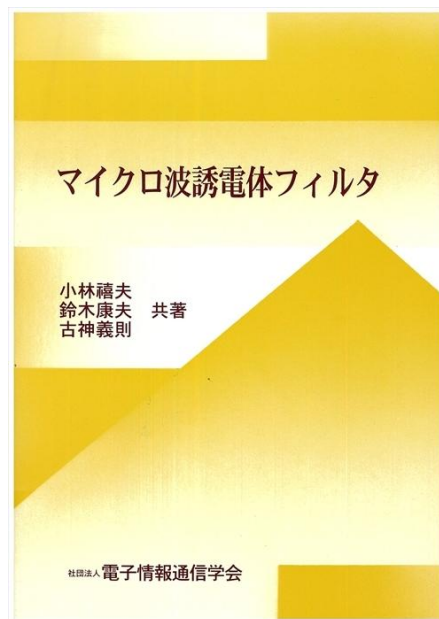
最適化後の
電磁界シミュレーション結果

- 初期値推定から構造パラメータの最適化を経て、最終結果が高速に得られる。
- 学習データ範囲内であれば、設計仕様を変更して設計も可能

まとめに代えて

- 他のマイクロ波回路に比べて理論的に難しいとされるマイクロ波フィルタに少しでも興味を持っていただけるように「シン・マイクロ波フィルタ入門」と題して, Matthaei (ラダー型回路) から Cameron (結合行列) までのマイクロ波フィルタの回路合成理論を中心に解説した.
- 最新のフィルタ理論として結合行列を紹介したが, 結合行列そのものは1970年代に登場している. 一見, 確立しているように思われるフィルタ理論であるが, 実は今も発展途上であり, 新たな理論・技術が開発されている.
- 本講演がマイクロ波フィルタの研究・設計開発の一助になれば幸いである.

主な参考文献



参考文献 (1/2)



- [1] 小林禧夫, 鈴木康夫, 古神義則, "マイクロ波誘電体フィルタ," コロナ社, 2007.
- [2] 馬 哲旺, "マイクロ波フィルタ設計の基礎と実践," MWE 2011 基礎講座, Dec. 2011.
- [3] 馬 哲旺, "マイクロ波フィルタの基礎," MWE 2024 基礎講座TH5B, Nov. 2024.
- [4] G.L. Matthaei, L. Young, and E.M.T. Jones, Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structure, New York: McGraw-Hill, 1964.
- [5] J.-S. Hong and M.J. Lancaster, Microstrip Filters for RF/ Microwave Applications (Second Ed.), New Jersey Wiley, 2007.
- [6] S.B. Cohn, "Dissipation loss in multiple-coupled-resonator filters," Proc. of IRE, vol.47, no.8, pp.1342-1348, Aug. 1959.
- [7] A. E. Atia and A. E. Williams, "New types of waveguide bandpass filters for satellite transponders," COMSAT Technical Review, vol. 1, no. 1, Fall 1971.
URL: <https://www.comsatlegacy.com/CTR.html>
- [8] R. J. Cameron, "General coupling matrix synthesis methods for Chebyshev filtering functions," IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 47, no. 4, pp. 433-442, April 1999.
- [9] R. J. Cameron, "Advanced coupling matrix synthesis techniques for microwave filters," IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 51, no. 1, pp. 1-10, Jan. 2003.
- [10] R. J. Cameron, C. M. Kudsia, and R. R. Mansour, Microwave Filters for Communication Systems: Fundamental Design and Applications, John Wiley & Sons, 2007.
- [11] R. J. Cameron, C. M. Kudsia, and R. R. Mansour, Microwave Filters for Communication Systems: Fundamentals, Design and Applications (Second Ed.), John Wiley & Sons, 2018.
- [12] S. Amari, "On the maximum number of finite transmission zeros of coupled resonator filters with a given topology," IEEE Microwave and Guided Wave Lett., vol. 9, no. 9, pp. 354-356, Sept. 1999.
- [13] S. Amari and M. Bekheit, "Physical interpretation and implications of similarity transformations in coupled resonator filter design," IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 55, no. 6, pp. 1139-1153, June 2007.
- [14] G. Macchiarella, "Generalized coupling coefficient for filters with nonresonant nodes," IEEE Microwave and Wireless Comp. Lett., vol. 18, no. 12, pp. 773-775, Dec. 2008.
- [15] A. Garcia-Lamperez, M. Salazar-Palma, and T. K. Sarkar, "Analytical synthesis of microwave multiport networks," 2004 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., Fort Worth, TX, USA, 2004, pp. 455-458.

- [16] H. Kayano and M. Ohira, “Fundamentals of microwave filters: synthesis theory and design techniques,” TJMW2013 (Thailand-Japan MicroWave) Short Courses: Tutorial 4, Kasetsart University, Bangkok, Thailand, Dec. 2013.
- [17] M. Ohira, “Microwave planar bandpass filter design for student design competition,” Tutorial Session of 2016 Thailand-Japan MicroWave (TJMW2016), KMUTNB, Bangkok, Thailand, June 2016.
- [18] 大平昌敬, “ワイヤレス新時代におけるマイクロ波フィルタの理論・解析・設計入門,” MWE 2015 基礎講座 WE4B, Nov. 2015.
- [19] 大平昌敬, 馬 哲旺, “フィルタ回路の結合行列から紐解く無負荷Q値・蓄積エネルギー・群遅延・挿入損失の理論的關係,” 信学技報, vol. 117, no. 17, MW2017-17, pp. 55-60, May 2017.
- [20] M. Ohira and Z. Ma, “A parameter-extraction method for microwave transversal resonator array bandpass filters with direct source/load coupling,” IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. 61, no. 5, pp. 1801-1811, May 2013.
- [21] 大平昌敬, 馬 哲旺, “入出力直接結合を有する共振器並列結合形マイクロ波帯域通過フィルタのパラメータ抽出法,” 信学技報, vol. 114, no. 498, MW2014-212, pp. 55-60, Mar. 2015.
- [22] M. Ohira, “A parameter-extraction method for transversal resonator array bandpass filters and its applications to multi-mode filter designs,” Workshop WS1D in 2014 Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC 2014), Sendai, Japan, Nov. 2014.
- [23] 大平昌敬, 出口博之, “マイクロ波フィルタ設計の基礎,” 信学技報, vol. 124, no. 78, MW2024-25, pp. 34-39, June 2024.
- [24] S. Grivet-Talocia and B. Gustavsen, Passive Macromodeling Theory and Applications, John Wiley & Sons, 2015.
- [25] H. Hu and K. -L. Wu, “A generalized coupling matrix extraction technique for bandpass filters with uneven-Qs,” IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 62, no. 2, pp. 244-251, Feb. 2014.
- [26] M. Ohira and Z. Ma, “Surrogate-based EM optimization using neural networks for microwave filter design,” IEICE Trans. Electron., vol.E105-C, no.10, pp.466-473, Oct. 2022.

■ 大平昌敬

- 所属:同志社大学理工学部電子工学科 教授
- E-mail: mohira@mail.doshisha.ac.jp