アンテナ設計のための FDTD 法

FDTD Technologies for Antenna Design

有馬　卓司
Takuji ARIMA

東京農工大学　工学部　電気電子工学科

概要

電波の応用範囲はますます広がっており，これまで使用されていなかった分野への応用も広がっている．このような背景より，電波の送信および受信に必要不可欠なアンテナの高性能化が望まれている．高性能なアンテナを設計するには，カットアンドトライによる開発よりも，電磁界シミュレータを活用した開発が効率的である．電磁界シミュレーション手法の一つとして FDTD 法があり広く利用されている．この手法は，時間領域のマクスウエルの方程式を直接差分し，電界と磁界について求める手法である．この手法の一番の利点としてはアルゴリズムがシンプルであり複雑な問題も比較的容易に解析出来る点にある．FDTD 法のデメリットとしては，計算時間が多く必要であり場合によっては実用的な計算時間で終わらない点であるが，現在 GPU などの高速計算技術が発達してきておりデメリットが解消されつつある．本基礎講座においては，電波の送信および受信を担うアンテナの設計を，FDTD 法を用いて行う手法について講義する．アンテナにおいてその特性を示す代表的な量は，入力インピーダンス，指向性，放射効率などである．一方，FDTD 法においては上述した通り電界と磁界を求める手法である．よって，FDTD 法により求まった電界・磁界よりアンテナの性能を示す量を求める必要がある．本基礎講座では，この手法について説明する．図 1 に本講座で解説する FDTD 法を用いたアンテナ設計のイメージ示す．

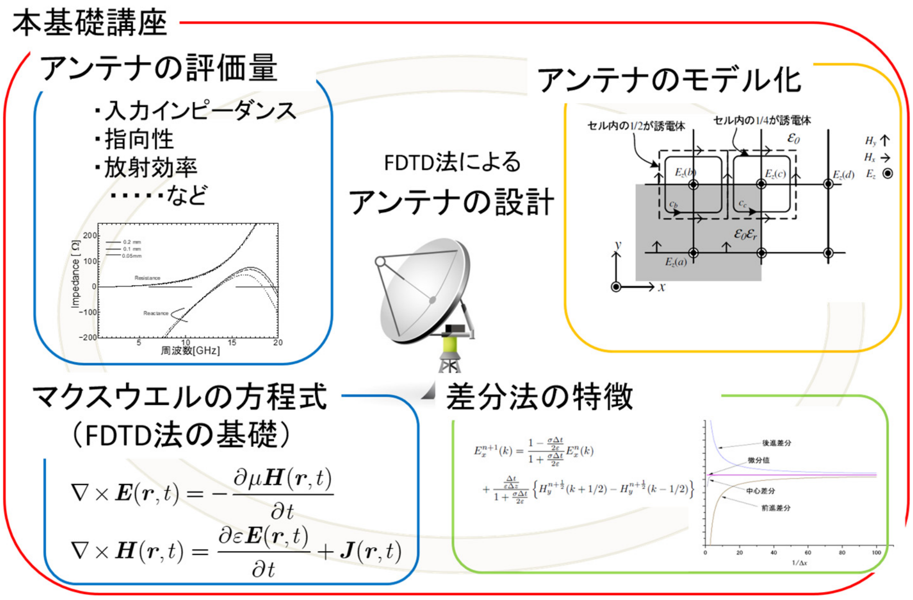

図１　本基礎講座のイメージ

Abstract
The range of application of radio waves is expanding, and the application that has not been used so far is also expanding. From this background, high-performance antennas are desired, because of the antenna act as interface of radio waves. Development using an electromagnetic simulator is more efficient than designing by cutting and trying to design a high-performance antenna. The FDTD method is widely used to analyze antenna problem. In this lecture, the FDTD method for antenna design is introduced.

1. はじめに

電波を用いた電子機器が増えている．これら機器は，人体の近傍など複雑な環境で使用されることが一般的である．このような複雑な環境で安定して電波を使用するには，電磁界解析を用いた設計が不可欠である．電磁界解析手法は，積分方程式に基礎を置くモーメント法や，マクスウエルの方程式の微分形を差分法を用いて定式化する FDTD (Finite Difference Time Domain) 法[1][2][3][4][5]などが代表的な手法である．本稿では，FDTD 法を用いてアンテナを設計する際の注意点などを解説する． FDTD 法は電界および磁界が基本量となっている．一方，アンテナの評価には入力インピーダンス，遠方界などが必要となる．本稿では FDTD 法を用いてこれらを求める方法を述べる．

2. マクスウエルの方程式とその意味

本節では，FDTD 法で定式化に用いるマクスウエルの方程式[1]について述べる．次式に時刻を t, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とした際の微分形のマクスウエルの方程式を示す．

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ はそれぞれ電界ベクトル，磁界ベクトルであり，$\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ電束密度，磁束密度である．電界・磁界と電束密度・磁束密度の間には，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ の関係がある．ここで，ε, μ はそれぞれ誘電率，透磁率と呼ばれる．また，$\boldsymbol{J}$ は導電電流ベクトルであり ρ は電荷密度である．マクスウエルの方程式を理解することで，電界および磁界が空間にどのように存在するかが理解でき，さらには電波の振る舞いも理解できるようになると考えるので簡単に説明する．(1) 式はファラデーの法則と呼ばれ，磁束密度が時間で変化するとその空間には回転する電界が発生することを表している．これは磁界から電界が発生することを表している．また，時間で磁界が電荷しない静磁界においては，磁界から電界が発生することはない．次に，(2) 式はアンペアの法則と呼ばれ，電流が流れるとその周りには回転する磁界が発生することを示している．この現象は大変有名であり，中学校などの理科の実験で経験した事があるかもしれない．一方(2) 式の右辺には電束密度の時間微分の候が現われている．これは，電束密度が時間で変化すると，電流と同様な振る舞いをし，電流が流れたのと同様に回転する磁界が発生する事を示している．この電束密度の時間微分の項は変位電流と呼ばれ，マクスエルが発見した．変位電流の意味は, 空間に導電電流 $\boldsymbol{J}$ が存在せずとも，時間で電束密度が変化していれば空間に磁界が発生することを意味している．(1) (2) 式より，磁界が電界の源となり，同様に電界が磁界の源となることが分かる．図2にそのイメージを示す．(3)および(4)は，ガウスの法則とよばれる．FDTD 法において(3)(4)式は明示的には用いないので説明は省略する．

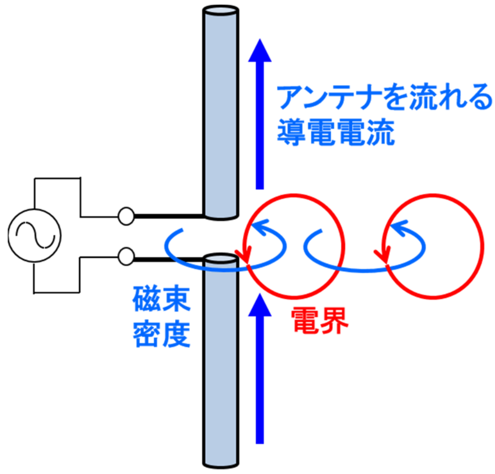

図 2　アンテナ上の導電電流と電界・磁界

3. FDTD 法と差分近似

FDTD 法において(1)(2)式を定式化する手順を説明する．FDTD 法を日本語に訳すと時間領域有限差分法となる．すなわち時間領域でのマクスウエルの方程式を有限差分法で解くという事である．まず本節では微分方程式の差分近似について説明する．まず微分の定義は

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

である．一般的にコンピュータにおいては，上式にある $\Delta x\to 0$ のような極値をとる操作は非常に不得意である．一方，差分近似においては，この極値をとる操作をしない．これは Δx が十分小さければ，微分した値に近い解が得られるためである．極値を取る操作をしない差分近似において差分は次の 3 種類が考えらる．(6) は前進差分，(7)式 は後進差分，(8)式は中心差分と呼ばれる．直感的に(8)式 の中心差分を用いたほうが精度が良いと推測され，実際にも中心差分が最も精度が良い．FDTD 法においてもこの中心差分が用いられる．図 3 にそれぞれの差分の精度を示す. 図は横軸が $1/\Delta x$ であり右に行けば行くほど離散間隔が細かいことを表す．中心差分は比較的離散間隔が荒い状況でも，微分値と近い値を示して

いる．

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x} \simeq \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{6}$$

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x} \simeq \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} \tag{7}$$

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x} \simeq \frac{f(x+\frac{\Delta x}{2})-f(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \tag{8}$$

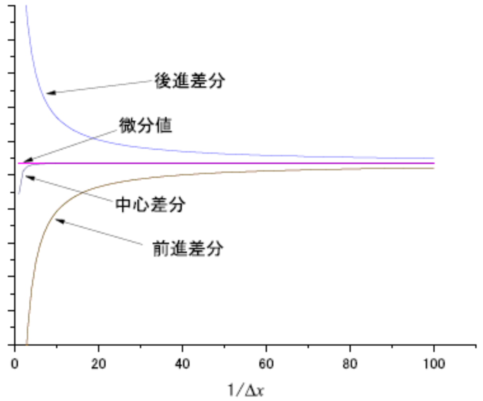

図 3 差分の精度

次に，(1) (2) 式の差分近似を示す．(1) (2) 式は3次元の式であり，ここでは FDTD 法の原理を示すことが目的であるので1次元問題を考える．(1) (2) 式を z 方向にのみ変化する1次元で表すと，

$$\mu\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \tag{9}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} + J_x \tag{10}$$

と表される．では(9)式右辺に中心差分を適用すると次式となる．

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \simeq \frac{E_x(z+\frac{\Delta z}{2},t)-E_x(z-\frac{\Delta z}{2},t)}{\Delta z} \tag{11}$$

この式は計算機が計算しやすい形となっている．FDTD 法における電界配置が図4であるとするし，$z=(k+1/2)\Delta z$ の位置で評価すると(11)式右辺は

$$\frac{E_x((k+1)\Delta z,t)-E_x(k\Delta z,t)}{\Delta z} \tag{12}$$

と表される．図4から分かるように FDTD 法においては同様に離散間隔ごとに電界が配置される．次に FDTD 法の時間配置を図5に示す．このよう FDTD 法においては時間においても電界・磁界は離散的に配置される．

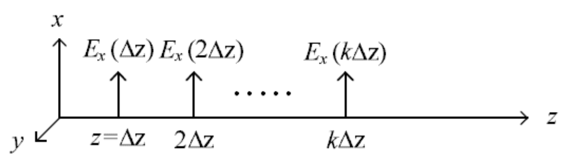

図 4　 FDTD 法の電界配置（1 次元）

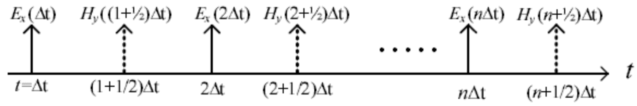

図 5　 FDTD 法の電界配置（1 次元）

最終的に(9) (10) 式を差分化し整理した式を次に示す．

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta z}\{E_x^n(k+1)-E_x^n(k)\} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(k) &= \frac{1-\frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}}E_x^n(k) \\ &+ \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z}}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}}\left\{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1/2)-H_y^{n+\frac{1}{2}}(k-1/2)\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

このように，左辺を未来の時間の値として式を整理すると，右辺はすべて過去の時間の値となる．よって，FDTD 法では過去の値から未来の値を求める作業をしている．FDTD 法における計算の流れを図6に示す．本節では1次元空間を例にとって説明しているが，この計算の流れは3次元問題においても同じである．また(14) 式には導電率σが現われている．これは，(10) 式中の電流を $J_x=\sigma E_x$ と表している．この表現を用いると導電率が現われ，金属などの導電性媒質などをモデル化するのに好都合である．また，電流が現われなくなるために，電流を求める必要がなくなる．

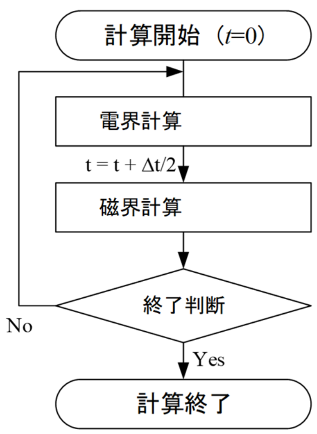

図 6　FDTD 法における計算の流れ

4. FDTD 法の電磁界配置

前節では，1 次元空間を例にとって FDTD 法の概念を説明した．アンテナ問題は一般的に 3 次元空間となるため本節では，3 次元空間における FDTD 法の電磁界配置を示す．

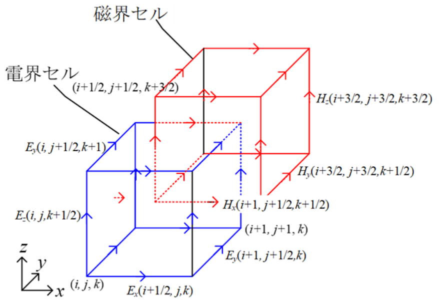

図 7　3 次元 FDTD 法における電磁界配置

図7に3次元空間におけるFDTD法の電磁界配置を示す．このように図4に示した1次元電界配置を3次元的に配置する．電界に注目するとそれぞれは離散的に配置されていることが分かり，立方体を形成する．この立方体の事をセルと呼ぶ．図7において青い立方体を電界セル，赤い立方体を磁界セルと呼ぶ．FDTD法においてどのようにアンテナをモデル化する際はこのセル単位でモデル化される．そのために一般的には，立方体の組み合わせでモデル化されるため，滑らかな曲線を持つ構造は階段状にモデル化されることになる．

5. FDTD 法におけるアンテナの設計方法

本節以降において，FDTD 法を用いたアンテナの設計方法を述べる．FDTD 法を用いてアンテナを設計する流れは大きく分けて次の 3 つのステップである．

1．アンテナのモデル化
2．FDTD 法による電磁界の計算
3．求まった電磁界よりアンテナ特性の評価

本節においては上記3ステップそれぞれに分けて解説する．

5.1. アンテナのモデル化

ここでは，FDTD 法におけるアンテナのモデル化手法について述べる．一般的にアンテナを構成する材料は金属などの導体と誘電体である．そしてアンテナには特有の構造として給電部がある．それぞれのモデル化手法を述べる．ここでは，簡単のため(13)(14) 式に示す 1 次元の式を用いて説明するが，3 次元でも同様な手法でモデル化できる．

まず金属のモデル化手法について述べる．金属の電機的特性は導電率が非常に大きい事である．銅の導電率σは 10^8 [S/m]オーダーである．導電率σは(14)式で表される電界の更新式に現れる．よって FDTD 法において金属をモデル化する際は図 7 の電界セルにおいてモデル化される．また，金属中の電界は 0 であるので，単に(14)式の左辺を0とおく事でも金属をモデル化する事が出来る．この手法は完全導体近似と呼ばれる．このように金属のモデル化は非常に簡単である．

次に FDTD 法において誘電体をモデル化する手法を述べる．損失性媒質を含む誘電体のモデル化は，完全導体とはやや異なる．図8 に示す誘電体を FDTD 法でモデル化する手法を述べる

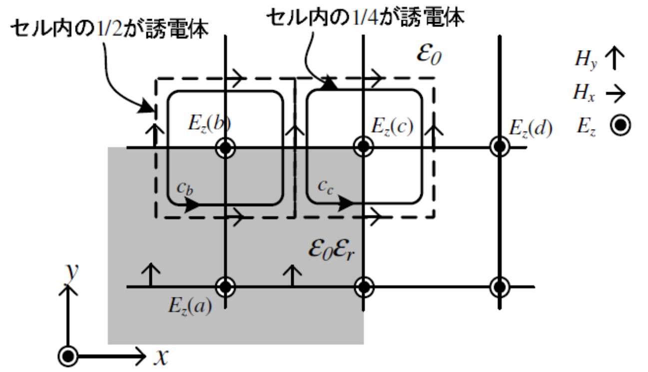

図 8　FDTD 法における誘電体のモデル化

図8の濃い色で塗られている部分が誘電体であり白い部分が自由空間である．まず図中の，E_z(a) は誘電体中にあるので，(14)式に現れる誘電率εを誘電体の値とすればよい．一方，誘電体の表面では特別な扱いが必要である．本稿においては微分形のマクスウエルの方程式を用いて FDTD 法の定式化を示した．一方, (15)式に示す積分形のマクウエルの方程式を用いても同様に定式化できる．

$$\oint_{c_b} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot dl = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \boldsymbol{n}dS \tag{15}$$

ここでは，(15)式の線積分において経路を図 8 の FDTD セル内の C_b に適用する．すると(15)式右辺は次式のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_z(b)\Delta x\Delta y\right\} \tag{15}$$

このように，誘電体の表面において FDTD 法では誘電率が面積比で表されることが分かる．また，損失媒質おいては上述したように誘電率をモデル化し，あとは金属のモデル化と同じように導電率σを用いてモデル化する事が出来る．

続いて給電部のモデル化手法について述べる．アンテナはダイポールアンテナなどの不平衡給電とマイクロストリップアンテナなどの平衡給電がある．まず，ダイポールアンテナの給電例を示す．ここでは，簡単のためにダイポールアンテナは完全導体とする．すると図9に示すように給電部以外は電界を0とすることでモデル化できる．また，このモデルではダイポールアンテナの太さは考慮していない．このモデル化手法は細線近似と呼ばれる．

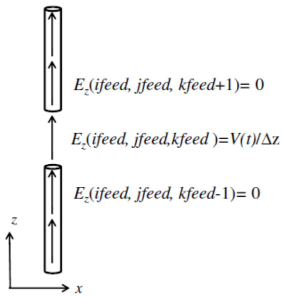

図 9　ダイポールアンテナの給電

そして図9に示すように給電部の電界に電源を与える．FDTD 法は時間領域の解法であるために，ここではパルスを与えることになる．FDTD 法ではパルスをアンテナに与えその結果をフーリエ変換することにより広い周波数応答を得る事が出来る．ここで用いるパルスは一般的には次式で表されるガウスパルスが用いられる．

$$p(t) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau_0)^2} & 0 \le t \le 2\tau_0 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{16}$$

(16)式中のαはパラメータでありこのパラメータを調整することによりパルスの周波数成分が変化する．また，広い周波数応答を求める際は広い周波数成分が含まれるパルスを用いる必要がある．

5.2. 2.　FDTD 法による電磁界の計算

上述しているように FDTD 法は時間領域の解法であるために，電磁界の過渡応答を容易に求める事が出来る．一方，アンテナの評価においてはおおむね周波数領域の結果が重要である．そこで，FDTD 法で求めた過渡応答をフーリエ変換することにより周波数領域の結果を得る．まず，フーリエ変換にいて周波数分解能Δfは

$$\Delta f = 1/(N\Delta t) \tag{17}$$

で表される．ここで，N は FDTD 法の計算ステップ数であり，時間離散間隔を何回計算するかであり，図 6 のフローチャートの繰り返し数に相当する．このように FDTD 法で長く計算すればするほど細かな周波数分解能が得られる．しかし FDTD 法は計算時間が多くかかり，N は少なくしたいのが一般的である．そこで周波数分解能と計算時間はトレードオフの関係である．また，フーリエ変換を正しく行うには信号が 0 になるまで収束しないといけない．パッチアンテナなどの Q 値の高いアンテナにおいては，電磁界の収束が遅く妥当な結果を得るのに多くの時間が必要であることが知られている．一般的にフーリエ変換は最大値の 1/1000 程度に信号が小さくなるまで計算する必要がある．

5.3. 求まった電磁界よりアンテナ特性の評価

FDTD 法では，電界と磁界を求めている．アンテナの評価において代表的な指標は

・入力インピーダンス
・指向性
・放射効率

があげられる．ここでは，FDTD 法においてどのように上記指標を求めるか説明する．

まず入力インピーダンス$Z(\omega)$は

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} \tag{18}$$

のように給電部の電流と電圧の比である．電圧は直接与えているのでここでは，給電部の電流の求め方について述べる．FDTD 法において電流を求めるには，次式で示す積分形のアンペアの法則を用いる．

$$I(t) = \oint_c \boldsymbol{H} \cdot dl \tag{19}$$

このように，給電部周りの磁界を周回積分することにより給電部の電流を求める事が出来る．なお(19)式の電流には変位電流も含まれるためその影響を最小限にするためには周回路 c をなるべく小さくとる必要がある．

次に FDTD 法において指向性を求める手法について述べる．指向性は十分遠方での電界より求める事が出来るが，FDTD 法において計算時間が莫大となるために解析領域を十分遠方まで取ることができない．そこでアンテナの近傍で求めた電界・磁界より遠方での電界の値を求める．この手法は測定などで用いられる近傍界遠方界変換と同じ手法である．指向性を求めるには近傍界の等価電流 Js と等価時流 Ms より指向性関数 D を求めることにより求める事が出来る．それぞれは次式で求める事が出来る．

$$D_\theta(t) = -\frac{Z_0 W_\theta(t) + U_\phi}{4\pi c} \tag{20}$$

$$D_\phi(t) = -\frac{Z_0 W_\phi(t) + U_\theta}{4\pi c} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{W}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \boldsymbol{J}_s\left(t + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right) dS' \tag{22}$$

$$\boldsymbol{U}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \boldsymbol{M}_s\left(t + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right) dS' \tag{23}$$

ここで，Js と Ms は図 10 に示すアンテナを囲むような等価面を設定し等価面上で求める．このようにするとアンテナの複雑な形状は必要なくなり簡易に求める事が出来る．これは一般的な近傍界遠方界変換の測定と同様である．また，(22)(23)式には時間微分の項が現われている．この計算は差分近似を用いて行う事が出来る．

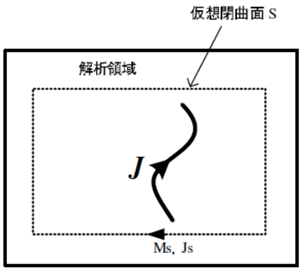

図 10　等価電磁流を求める仮想閉曲面

放射効率の求め方について説明する．アンテナの放射効率ηはアンテナに入力される入力電力 P_{in} と損失電力 P_{loss} を用いて

$$\eta = \frac{P_{in} - P_{loss}}{p_{in}} \tag{23}$$

より求める事が出来る．ここで，アンテナに入力される入力電力 P_{in} はアンテナの入力 Z_{in} が分かっていれば

$$P_{in}(\omega) = Re\left[\frac{V_{in}(\omega)}{Z_{in}(\omega)}\right] \tag{23}$$

より求める事が出来る．また，損失電力 P_{loss} は

$$\begin{aligned} P_{loss} &= \int_V \sigma(\boldsymbol{r})|E(\omega,\boldsymbol{r})|^2 dv \\ &= \sigma|E(\omega,\boldsymbol{r})|^2 \Delta x \Delta z \Delta z \end{aligned} \tag{24}$$

と計算できる．

6. FDTD 法におけるアンテナの解析例

ここではダイポールアンテナを例にとってその解析例を示す．ダイポールアンテナは図 11 に示すような全長 10 mm 一辺が 0.4mm の角柱ダイポールアンテナの解析例を示す.

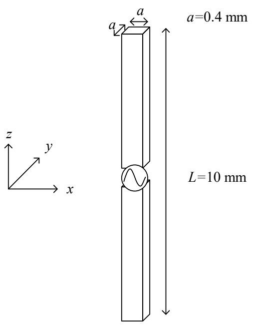

図 11　角柱ダイポールアンテナ

また，FDTD 法のセルサイズは 0.05mm～0.1mm とした. 入力インピーダンスの解析結果を図 12 に示す．この結果より，共振周波数付近ではセルサイズ 0.1mm 程度でほぼ解が収束していることが分かる．また，これは，解析最大周波数の20GHz において，$\lambda_{20GHz}/150$ に相当する．完全導体で構成されるダイポールアンテナではこの程度で収束すると推測される．

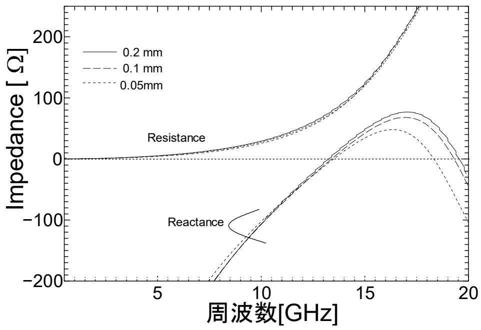

図12　入力インピーダンスの解析例

このように FDTD 法ではセルサイズを細かくとることによりより正確な結果を得る事が出来る．これは差分法の特徴である.

7. まとめ

本稿では FDTD 法を用いたアンテナ設計について解説した．FDTD 法で求めているのは電界磁界であり，そこから入力インピーダンスの計算に必要な電流や，指向性，放射効率の求め方を説明した．最後にダイポールアンテナの解析結果を示した．この結果より FDTD 法でより高精度に解析するには細かなセルを持ちる必要があることが理解できる．一方細かなセルを用いるとおのずと計算量が大きくなり，計算時間とのトレードオフになる．ぜひ自身で解析を行い，精度と必要なセルサイズの間隔を身に着けてほしい．

文　献

[1] K. S. Yee, ” Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations,”IEEE tansaction on Antennas and Propagation, vol. 14, pp. 302-207, 1966.

[2] 宇野亨　”FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析”，コロナ社，1998

[3] A. Taflove, S. C. Hagness, ”Computatinal electrodynamics the Finite-difference time-domain method 3rd ed.”,Artech House, 2005

[4] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, The finite difference time domain method for electromagnetics:CRC press, 1993

[5] 何一偉，宇野亨，有馬卓司，“数値電磁界解析のための FDTD 法: 基礎と実践”，コロナ社，2016

著者紹介

有馬　卓司

東京農工大学工学部，准教授，t-arima@cc.tuat.ac.jp