FDTD 法入門
Introduction to the FDTD method

柴山　純
Jun Shibayama

法政大学　理工学部

概要

有限差分時間領域(FDTD)法は電磁界問題の数値解法として広範に使用されている．その定式化は極めて簡素であり，Maxwell の方程式を Yee 格子の電磁界配置に基づき差分法を用いて直接離散化して行われる．しかし，実際の計算では，様々な技術が必要になってくる．例えば，吸収境界条件の設置，電磁界の励振，電磁界の表示方法などは重要である．本基礎講座では，筆者が大学で講義している内容を基にFDTD 法を講義し，その基礎を理解することを目的とする．

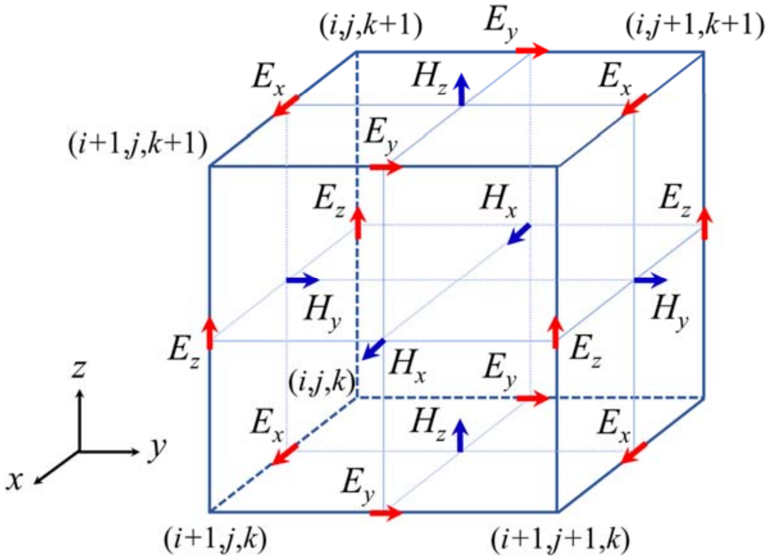


図　Yee 格子の電磁界配置

Abstract

The finite-difference time-domain (FDTD) method has widely been used to treat electromagnetic problems. The formulation of the FDTD method is quite simple, i.e., Maxwell's equations are directly discretized with the finite-difference scheme with Yee's mesh. For practical simulations, several techniques should be incorporated into the FDTD method. For example, we need to impose an absorbing boundary condition, excite an incident field and display electromagnetic fields. In this presentation, we study the basic of the FDTD method with a lecture note.

.

1. はじめに

有限差分時間領域(FDTD)法[1]-[7]は電磁界問題の数値解法として，極めて広範に用いられている．市販のソフトウエアも多く発売され，誰でも容易に使えるようになってきた．FDTD 法の定式化は差分法の知識があれば可能である．しかし，実際の計算では，様々な技術を組み込む必要があり，プログラムを自作する場合には苦労する場合もある．計算結果の解釈には電磁気学や電気回路の知識も必要になってくる．

本基礎講座では筆者の大学での講義ノートを基に FDTD 法の基礎を学ぶ．マクスウェルの方程式からの差分式の導出，吸収境界条件の設置，入射界の励振などを中心に講義する．

2. Maxwell の方程式

無損失，線形，等方性媒質に対する電磁波伝搬は，次の Maxwell の方程式により記述される．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ はそれぞれ電界，磁界ベクトル，ε は誘電率，μ は透磁率を表す．上式で回転の演算を直交座標系で実行すると次の 6 本の式が得られる．

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{4}$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{5}$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{6}$$

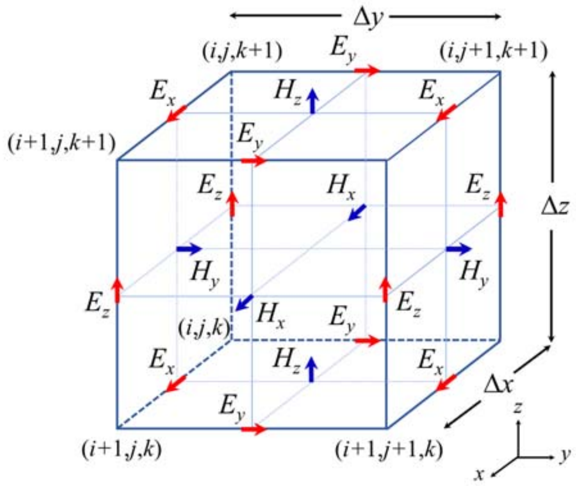
$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{7}$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{8}$$

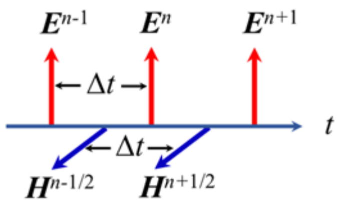
式(3)-(8)を次に示す Yee 格子を用いて差分化すると，FDTD 法の計算式が得られる．

3. Yee 格子

図 1(a)に空間での電磁界配置を表す Yee 格子を示す．(b)は電界・磁界の時間配置である．



(a) Yee 格子



(b) 電界・磁界の時間配置

図 1　電界・磁界の空間と時間配置

図 1(a)から，電界と磁界が空間的に半セルずつずれている（Staggered grid とも呼ばれる）ことがわかる．x，y，z 方向の辺の長さはそれぞれ離散間隔Δx，Δy，Δz，離散点の位置は $x=i\Delta x$，$y=j\Delta y$，$z=k\Delta z$ で表される．ここで，i，j，k は 0 から離散点の最大値までをとる整数である．サイコロを空間に並べるように解析する領域全体を Yee 格子によって離散化する．図 1(b)からは，電界と磁界が時間的にも半セルずつずれていることがわかる．すなわち FDTD 法では，電界と磁界は，空間的にも時間的にも半セルずつずれのあることが特徴的である．

4. 差分式の導出

ここでは一例として，式(3)を差分化する．式(3)の左辺を差分化する際，時間微分の中心を n に設定する．従って，H_x の差分は図 1(b)から n をまたいだ n+1/2 と n-1/2 での値を用いて

$$\frac{\partial H^{n}_{x,i,j+1/2,k+1/2}}{\partial t} \approx \frac{H^{n+1/2}_{x,i,j+1/2,k+1/2} - H^{n-1/2}_{x,i,j+1/2,k+1/2}}{\Delta t} \quad (9)$$

となる．H_xの空間での位置は図 1(a)の$(i, j+1/2, k+1/2)$であり，式(9)中のH_xの下付き文字で表記する．

引き続き式(3)の右辺を差分化する．時間微分の中心は n なので，この時間において図 1(a)の Yee 格子を用いる．式(3)の右辺第 1 項では，空間微分の中心は式(9)の H_x の位置$(i,\ j+1/2,\ k+1/2)$であり，この H_x を上下に挟むように$(i,\ j+1/2,\ k+1)$と$(i,\ j+1/2,\ k)$での E_y を用いて

$$\frac{\partial E^{n}_{y,i,j+1/2,k+1/2}}{\partial z} \approx \frac{E^{n}_{y,i,j+1/2,k+1} - E^{n}_{y,i,j+1/2,k}}{\Delta z} \quad (10)$$

とする．式(3)の右辺第 2 項も同様に H_x を左右に挟むように

$$\frac{\partial E^{n}_{z,i,j+1/2,k+1/2}}{\partial y} \approx \frac{E^{n}_{z,i,j+1,k+1/2} - E^{n}_{z,i,j,k+1/2}}{\Delta y} \quad (11)$$

とする．式(9)-(11)を式(3)に代入し，未知項を左辺に，既知項を右辺に移項すると解くべき差分式

$$\begin{aligned} H^{n+1/2}_{x,i,j+1/2,k+1/2} = H^{n-1/2}_{x,i,j+1/2,k+1/2} & \\ + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z}\left(E^{n}_{y,i,j+1/2,k+1} - E^{n}_{y,i,j+1/2,k} \right) & \\ - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y}\left(E^{n}_{z,i,j+1,k+1/2} - E^{n}_{z,i,j,k+1/2} \right) & \quad (12) \end{aligned}$$

が得られる．時間 n，n-1/2 での界は初期値として与えられ，式(12)より時間 n+1/2 での H_x が求まる．他の 2 成分も同様に計算できる．電界に関しても 3 本の差分式を導出し，時間 n での電界と先に求めた n+1/2 での磁界から n+1 での電界の値が計算できる．以上のように FDTD 法では時間 n=0，-1/2 での界を初期値として与え，領域全体の界をΔt ごとに更新し，所望の時間まで計算を進める極めて簡素なアルゴリズムである．

実際の計算では，Δt の上限に関する Courant 条件

$$v\Delta t \le \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (8)$$

を満たす必要がある．ここで v は解析領域内で最も早く伝搬する電磁波の速度である．

ここで，Maxwell の方程式の物理的意味と，Yee 格子の電磁界配置について考えてみる．式(1)から，電界の回転から磁界の時間変化が生じることがわかる．Yee 格子では，ある面の 4 辺に電界成分が配置されており，それらの回転からその中心の磁界成分を計算している．式(2)でも同様に，磁界の回転から電界の時間変化が生じる．この現象も Yee 格子の電磁界配置で無理なく計算できる．すなわち， FDTD 法は Maxwell の方程式を極めて自然な形で数値計算できる手法であるといえる．

5. 大学シラバス

法政大学では以下のシラバスで講義を行っている．本基礎講座ではそのうち重要なトピックを取り上げ講義する．

第 1 回 歴史的背景 電磁波情報工学の発展過程と現状について
第 2 回 マクスウェルの方程式 電界と磁界につてのカール方程式について
第 3 回 FDTD 法 FDTD 法とは何か
第 4 回 差分法の基礎 微分と差分について 中心差分，前進差分，後退差分について
第 5 回 Yee 格子と離散化 電界・磁界の Yee 格子への割当
第 6 回 1,2,3 次元問題 1,2,3 次元問題での FDTD 法
第 7 回 吸収境界条件(1) Mur，Higdon の吸収条件
第 8 回 吸収境界条件(2) Perfectly Matched Layer 吸収境界条件
第 9 回 励振方法 総合界・反射界領域の分離
第 10 回 瞬時値の複素化 定常界での複素振幅の導出
第 11 回 分散媒質(1) 分散媒質の FDTD 法への取り込み
第 12 回 分散媒質(2) Drude, Debye, Lorentz 分散
第 13 回 BOR・円筒座標系 BOR・円筒座標系を用いた FDTD 法の定式化
第 14 回 プログラミング 簡単な FDTD プログラミング演習

6. まとめ

FDTD 法の基礎を述べた. FDTD 法は様々な周波数範囲で用いることが出来るため，解析するモデルは極めて広範に存在する．筆者は元々光の周波数範囲で FDTD 法を用いていたが，より低周波のマイクロ波・ミリ波での解析では光とは勝手が異なり苦労することも多い．それぞれの周波数帯の解析で必要になる技術を，その都度学ぶのは必要なことであろう．本基礎講座が実際に FDTD 法の自作を考えられている方，FDTD 法シミュレーターをお使いの方の参考になれば幸いである．

文　献

[1] K. S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, May 1966.

[2] A. Taflove and S. C. Hagness, Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood, MA: Artech House, 2005.

[3] 宇野 亨, FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 東京, 1998.

[4] 何 一偉，有馬卓司（著），宇野 亨（編）：数値電磁界解析のための FDTD 法，コロナ社，東京, 2016.

[5] 橋本 修, 実践 FDTD 時間領域差分法, 森北出版, 東京, 2006.

[6] 柴山 純, “シミュレーション総復習 電磁界シミュレーションのコツ (基礎編): 光導波路デバイスを例に,” 応用物理, vol. 86, no. 4, pp. 327-330, 2017.

[7] 柴山 純, “シミュレーション総復習 電磁界シミュレーションのコツ (実用編): 光導波路デバイスを例に,” 応用物理, vol. 86, no. 5, pp. 408-411, 2017.

著者紹介

柴山　純

法政大学理工学部，教授，shiba@hosei.ac.jp