

# 電磁界シミュレーションの概要と基礎原理

## —簡単な1次元問題による説明—

### Basic algorithm of electromagnetic-field simulators

#### —Fundamental understanding using one-dimensional cases—

平野 拓一  
Takuichi HIRANO

東京工業大学大学院理工学研究科 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-S3-19  
Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology  
2-12-1-S3-19 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

E-mail: hira@antenna.ee.titech.ac.jp

#### Abstract

Many electromagnetic (EM) simulators, whose purpose is to solve Maxwell's equations, are useful these days thanks to the progress of computational resources. It is not necessary for engineers to understand EM analysis algorithms. However, it is desirable for engineers to understand the underlying EM analysis algorithms in order to use EM simulators effectively.

This tutorial lecture presents various EM analysis algorithms, such as the method of moments (MoM), the finite-difference time-domain (FDTD) method, the finite-difference frequency-domain (FDFD) method, and the finite element method (FEM), using a one-dimensional problem for young and/or new engineers. The formulation is very easy in one-dimensional problem. It is also possible to choose suitable EM simulator for a problem to be solved if one has knowledge about the EM simulation algorithm. The objective of this paper is helping engineers to understand difference of EM analysis algorithms.

#### 1. はじめに

マクスウェルがアンペアの法則に変位電流を導入して電磁波の基礎方程式[1]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{ファラデーの法則}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{アンペアの法則}) \quad (2)$$

を確立して以来、多くの規範問題が解かれて電磁界現象が明らかとなった。しかしながら、現実に近い問題を解くためには数値的手法に頼らざるを得ず、種々の電磁界シミュレーションアルゴリズムが提案された。さらに、その後のコンピュータの性能の大きな飛躍によって電磁界シミュレーション技術は実用的なものになり、多くの電磁界シミュレータが市販されるようになった。

電磁界シミュレータが発展して便利になり、アルゴリズムを知らなくても解析できるようになったが、電磁界シミュレータのアルゴリズムを知らなければ上手く使いこなせないのが現状である。電磁界シミュレータの目的は、マクスウェルの方程式（電磁界現象の支配方程式である微分方程式）を指定した境界条件の下で解くこと（境界値問題）である[2]。解析アルゴリズムによって数値的扱いが異なり、それぞれ問題によって長所と短所がある。

本基礎講座では、電磁界分野の初学者のために1次元問題[3]を用いて各種電磁界解析手法、特にモーメント法 (MoM; Method of Moments) [4], FDTD (Finite-Difference Time-Domain) 法 [5], FDFD (Finite-Difference Frequency-Domain)法[6], 有限要素法 (FEM; Finite Element Method)[7]について紹介する。1次元問題は定式化が簡単なため、自分でプログラムを作成して確認することが容易である。文章で説明できないことを補うため、そして実際にプログラムを動かして勉強するために Mathematica Ver.8 による解析プログラム例を付録に掲載した。電磁界分野の初学者の一助となれば幸いである。

#### 2. 解析モデル

図 1に例題として取り扱う1次元問題の解析モデルを示す。電磁界は $z$ 方向にのみ変化し、 $x, y$ 方向に一様である。 $z_1 \leq z \leq z_2$ の領域のみ比誘電率は $\epsilon_r = 4$ ( $\text{SiO}_2$ のガラスを想定)であり、それ以外は真空である。また $z = z_2$ には $x$ 方向を向いた $x, y$ 方向には無限に広がった面電流源 $\mathbf{J}$ がある(電界は $x$ 方向、磁界は $y$ 方向となる)。

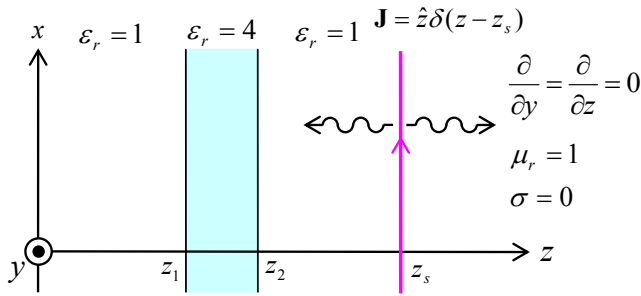


図 1 1次元問題の解析モデル

### 3. 種々の解析法のアルゴリズムの説明

本節では例として前節で説明した1次元問題を取り上げ、種々の解析法のアルゴリズムについて説明する。

#### 3.1. モーメント法 (MoM)

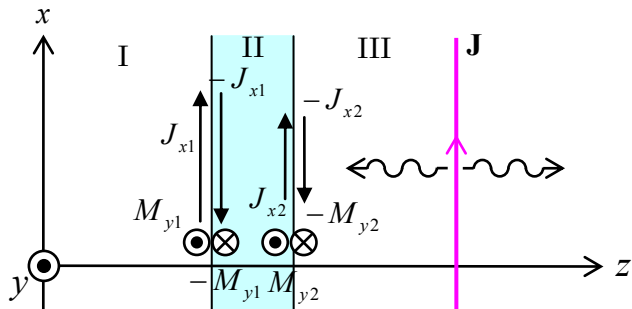


図 2 モーメント法の領域分割

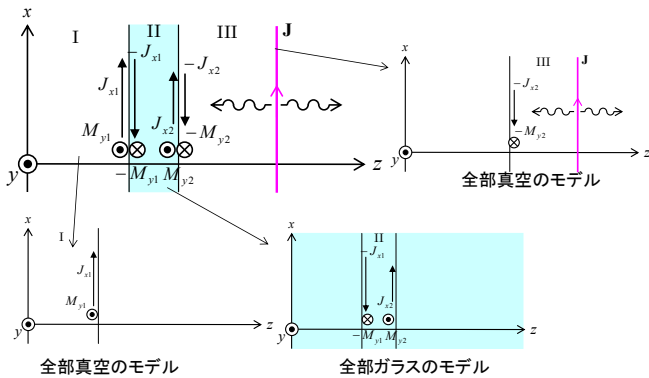


図 3 各領域の電磁界の計算モデル

モーメント法(Method of Moments; MoM)[4]は周波数領域の解析法であり、界等価定理(Field Equivalence Theorem)[2]を基本原理とする。界等価定理によると異なる媒質の境界(異ならなくてもよい)に等価電磁流を仮定すると、各領域は一樣な媒質で満たされていると考えることができる。図 1の問題では図 2のように媒質境界に $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$ の4つの電流および磁流を仮定する。それらは、既知の基底関数(または展開関数)に対する重み $J_{x1}, M_{y1}, J_{x2}, M_{y2}$ で次のように表現する。

$$\mathbf{J}_1 = J_{x1} \hat{x} \delta(z - z_1) \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_1 = M_{y1} \hat{y} \delta(z - z_1) \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_2 = J_{x2} \hat{x} \delta(z - z_2) \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_2 = M_{y2} \hat{y} \delta(z - z_2) \quad (6)$$

例えば、 $\mathbf{J}_1$ においては $\hat{x} \delta(z - z_1)$ が基底関数であり、 $J_{x1}$ がその基底関数に対する重みである。このようにして重み係数を求めるための連立一次方程式を解く問題に帰着させている(これは3次元の解析でも同様である)。電界および磁界の接線成分が等しい(境界条件)こと、および境界の反対側では等価定理よりの法線ベクトルが逆となるので異符号の電磁流が流れる。このように媒質の境界面に電磁流を置くと、各領域の電磁界の解析は真電流 $\mathbf{J}$ および、媒質境界に仮定した等価電磁流からの一様媒質内での放射で計算することができる(界等価定理より)。図 3に示すように、領域 I では $J_{x1}, M_{y1}$ が真空中にあるとして放射電磁界を計算すればよい。領域 II では $-J_{x1}, -M_{y1}, J_{x2}, M_{y2}$ がガラス中にあるとして放射電磁界を計算すればよい。領域 III では $-J_{x2}, -M_{y2}$ および真電流 $\mathbf{J}$ が真空中にあるとして放射電磁界を計算すればよい。

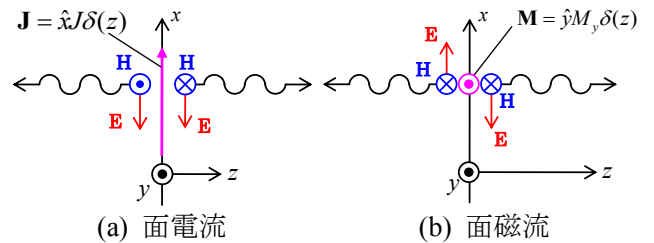


図 4 面電磁流からの放射

次に、この計算に必要な面電磁流からの放射を計算しておく。図 4 (a)に示す面電流からの放射界は次式となる(付録 A.1 参照)。

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\hat{x} \eta \frac{J}{2} e^{jkz} & (z < 0) \\ -\hat{x} \eta \frac{J}{2} e^{-jkz} & (z > 0) \end{cases}, \quad \mathbf{H} = \begin{cases} \hat{y} \frac{J}{2} e^{jkz} & (z < 0) \\ -\hat{y} \frac{J}{2} e^{-jkz} & (z > 0) \end{cases} \quad (7)$$

また、図 4 (b)に示す面磁流からの放射界は次式となる。

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{x} \frac{M}{2} e^{jkz} & (z < 0) \\ -\hat{x} \frac{M}{2} e^{-jkz} & (z > 0) \end{cases}, \quad \mathbf{H} = \begin{cases} -\hat{y} \frac{M}{2\eta} e^{jkz} & (z < 0) \\ -\hat{y} \frac{M}{2\eta} e^{-jkz} & (z > 0) \end{cases} \quad (8)$$

一般に、電磁流から電界および磁界を計算するときは畳み込みの表現となるが、そのときに電磁流に掛けて(ベクトル的には内積を取って)畳み込みを行う関数は電磁流のインパルス応答に相当し、グリーン関数とよばれる。

4つの等価電磁流および励振面電流源が放射する

電磁界を各領域で計算し、 $z = z_1, z_2$ の境界両側において電界および磁界の接線成分が等しいという方程式を立てると次式が得られる。

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t|_{z=z_1^-} = \mathbf{E}_t|_{z=z_1^+} \\ \mathbf{H}_t|_{z=z_1^-} = \mathbf{H}_t|_{z=z_1^+} \\ \mathbf{E}_t|_{z=z_2^-} = \mathbf{E}_t|_{z=z_2^+} \\ \mathbf{H}_t|_{z=z_2^-} = \mathbf{H}_t|_{z=z_2^+} \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ の下添え字  $t$  は境界の接線 (tangential) 成分を表している。 $z_1^-, z_1^+$  はそれぞれ  $z = z_1$  のすぐ左側と右側を表している。同様に  $z_2^-, z_2^+$  はそれぞれ  $z = z_2$  のすぐ左側と右側を表している。 $z_1^-$ の電磁界は領域 I のモデルで、 $z_1^+$ および  $z_2^-$ の電磁界は領域 II のモデルで、 $z_2^+$ の電磁界は領域 III のモデルで計算する。

1次元問題の場合には式(9)の連立方程式から解が得られるが、2次元、3次元の問題では式(7)を成立させる観測点は境界上の全ての場所としなければならぬため、境界面上で定義された任意の関数で重み付けして境界面で積分し、これを**重み付け残差法**と言う。また、重み関数を基底関数と同一に選ぶ場合、**ガラーキン法**と言う。1次元の場合には式(3)~(6)の基底関数で重み付けすると、次式のように  $x, y$  成分を抽出する演算となる。

$$\begin{cases} E_x|_{z_1^-} = E_x|_{z_1^+} \\ H_y|_{z_1^-} = H_y|_{z_1^+} \\ E_x|_{z_2^-} = E_x|_{z_2^+} \\ H_y|_{z_2^-} = H_y|_{z_2^+} \end{cases} \quad (10)$$

未知数の数は  $J_{x1}, M_{y1}, J_{x2}, M_{y2}$  の4つ、方程式の数は4つなので解くことができる。1次元では積分が簡単であったが、2次元、3次元の問題では被積分関数にある未知電磁流を求める**積分方程式**を行列方程式に帰着させて解く手法である。モーメント法では FDTD 法や有限要素法とは違って放射条件は吸収境界条件などの特殊な処理を用いる必要がない。

### 3.2. FDTD 法

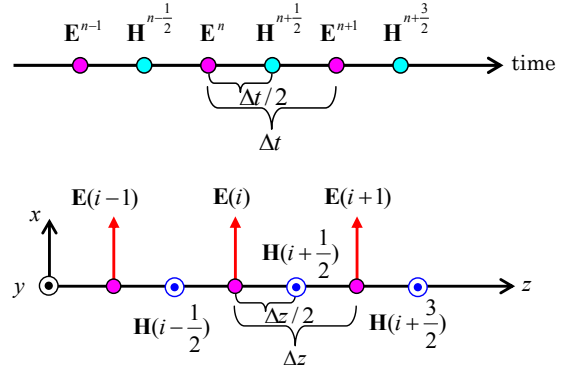


図 5 FDTD 法の時間および空間の離散化

FDTD(Finite-Difference Time-Domain)法[5][8-11]は時間領域の解析法である。計算機で微分を扱えるようにマクスウェルの方程式を時間および空間の両方に対して差分化 (差分は微分とは異なり、微小だが有限な範囲での値の変化) して陽的 (行列方程式を解かないで漸化式を逐次計算する) に解く手法である。図 5 に時間および空間の離散化を示す。電界と磁界の更新は半ステップずらして交互に行われる。また、電界と磁界は回転の差分計算のために空間的に半セルずれて配置されている。

式(1)-(2)において  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{i}_e$  ( $\sigma \mathbf{E}$  は導電電流、 $\mathbf{i}_e$  は電流源による励振電流) を代入すると次式が得られる。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{i}_e \quad (12)$$

空間、時間の差分化はどちらが先でも構わないが、先ず図 5 を見て次のように時間の差分化を行う。式(11), (12)を時間微分の項について整理すると次式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{i}_e \quad (14)$$

さらに、時間間隔  $\Delta t$  で時間を差分化し、時間ステップ  $n\Delta t$  のときの式(13)および時間ステップ  $(n+1/2)\Delta t$  のときの式(14)を書くと次式となる。

$$\frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n \quad (15)$$

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}^{n-1/2} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n-1/2} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{i}_e^{n-1/2} \quad (16)$$

ここで、次の中央差分による時間差分化が行われた。

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^n}{\partial t} = \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (18)$$

電磁界の上添え字は時間ステップ  $n\Delta t$  の  $\Delta t$  を除いた部分を記したものである。式(16)において電界  $\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}$  のような時間配置をしていないので  $\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} \cong \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{2}$  で近似する。

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{i}_e^{n-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

式(15)を  $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$  について、式(19)を  $\mathbf{E}^n$  について解くと次式が得られる。

$$\mathbf{E}^n = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \mathbf{i}_e^{n-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n \quad (21)$$

式(20)からは最新時間の電界は 1 ステップ前の電界および半ステップ前の磁界の回転と電流から求まることがわかる。式(21)からは最新時間の磁界は 1 ステップ前の磁界と半ステップ前の電界の回転から求まることがわかる。この演算を場所ごとに行えばよいのであるが、空間に非常に密に電磁界を配置するわけにはいかないため、空間も図 5 のように電界と磁界の配置を半セルずらして差分化する。任意のベクトル  $\mathbf{A}$  の回転の差分は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &\cong \hat{x} \left\{ \frac{A_z(i, j+1, k) - A_z(i, j, k)}{\Delta y} - \frac{A_y(i, j, k+1) - A_y(i, j, k)}{\Delta z} \right\} \\ &\quad - \hat{y} \left\{ \frac{A_z(i+1, j, k) - A_z(i, j, k)}{\Delta x} - \frac{A_x(i, j, k+1) - A_x(i, j, k)}{\Delta z} \right\} \\ &\quad + \hat{z} \left\{ \frac{A_y(i+1, j, k) - A_y(i, j, k)}{\Delta x} - \frac{A_x(i, j+1, k) - A_x(i, j, k)}{\Delta y} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

式(20), (21)に空間差分化を考慮し、導電率を 0 とおくと次の 1 次元問題の電磁界の更新式が得られる。

$$\begin{aligned} E_x^n(i) &= \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} E_x^{n-1}(i) \\ &\quad + \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \left[ -H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) + H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} i_{ex}^{n-\frac{1}{2}}(i) \\ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [E_x^n(i+1) - E_x^n(i)] \end{aligned} \quad (23)$$

全位置  $i$  について式(23)で電界を更新し、次に時間を半ステップ進めて式(24)で磁界を更新する。更に時間を半ステップ進めて同様に式(23)で電界を更新し・・・と繰り返すことになる。行列方程式を解く必要が無いのでプログラムは簡単であるが、注意としては時間ステップには

$$v\Delta t \leq \Delta z \quad (25)$$

の制約があり、時間ステップは任意に大きく取ることができない。ここで、 $v$  は媒質中の電磁波の速度であり、いろいろな媒質があるときは一番速い媒質に制約を受ける。式(25)の条件を満たさなければ時間ステップを進めると数値的に発散してしまう。この時間ステップの制約条件は提唱者の名前を取って CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件とよばれる。CFL 条件を満たす最大時間ステップで規格化した時間ステップは CFL 数といわれ、工夫していない FDTD 法では時間ステップは 1 CFL 数以下にしなければならない。FDTD 法はこのように任意の時間波形を入射させることができるので、パルスを印加して散乱波の時間波形を得て、それをフーリエ変換することで広い帯域の周波数特性を得ることができる。単一周波数を印加して解析を行うこともできるが、定常状態に達するまで時間ステップを進めなければならない。

次に、境界条件の処理について説明する。電気壁 (PEC) の場合には電界の接線成分が 0 になるので、電界を更新した直後に電界の接線成分を 0 と書き換える。磁気壁 (PMC) の場合は磁界の接線成分が 0 になるので、磁界を更新した直後に磁界の接線成分を 0 に書き換える。放射境界条件 (左が吸収境界の場合) は進行波の条件を満たす波動方程式  $E_x = E_x(z + ct)$ ,  $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$  から導出した次式を用いる方法があり、これは Mur 1 次の吸収境界条件といわれる。

$$E_x^{n+1}(i) = E_x^n(i+1) + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} \{E_x^{n+1}(i+1) - E_x^n(i)\} \quad (26)$$

磁界も同様な形の式となるが、電界と磁界は独立ではないので、電界あるいは磁界のどちらかに対して境界条件の処理を適用すればよい。

FDTD 法解析プログラムの流れを図 6 に示す。

- ・ 構造、媒質の設定
- ・ メッシュ生成
- ・ 時間ステップの決定
- ・ 更新式の係数の計算
- Loop {
  - ・ 電界の更新
  - ・ 電界の境界条件の処理
  - ・ 磁界の更新
  - ・ 磁界の境界条件の処理
  - ・ 吸収境界条件の処理

図 6 FDTD 法解析プログラムの流れ

### 3.3. FDFD 法

FDFD 法[6]では FDTD 法と同様の空間メッシュ分割を用いるが、周波数領域で行列方程式を解く手法である。式(11), (12)において  $\partial/\partial t = j\omega$  とおいて、空間は FDTD 法と同様に差分化すると次式を得る。

$$E_x(i+1) - E_x(i) + j\omega\mu\Delta z H_y(i) = 0 \quad (27)$$

$$-j\omega\varepsilon\Delta z E_x(i) - H_y(i) + H_y(i-1) = \Delta z i_{ex}(i) \quad (28)$$

次に、吸収境界条件の方程式を導出する。+z 方向に速度  $c$  で進む波動は  $\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$  を満たす。これを差分化すると

$$(j\omega\Delta z - 2c)E_x(i) + (j\omega\Delta z + 2c)E_x(i+1) = 0 \quad (29)$$

となる。磁界も同様なので

$$(j\omega\Delta z - 2c)H_y(n_z + 1/2) + (j\omega\Delta z + 2c)H_y(n_z + 3/2) = 0 \quad (30)$$

となる。-z 方向に進む波を吸収したい場合は式(29),(30)において  $c \rightarrow -c$  と置き換えればよい。式(27)-(30)を用いて空間に配置した電磁界の値すべてを未知数とする行列を作成すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \text{式(27),式(29)} \\ \text{式(28),式(30)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{i_{ex}\} \end{bmatrix} \quad (31)$$

上式を解くと周波数領域で空間の電磁界が求まる。行列サイズは非常に大きい、非常に疎な行列でもあり、疎行列に特化したソルバーを使うことができる。

### 3.4. 有限要素法 (FEM)

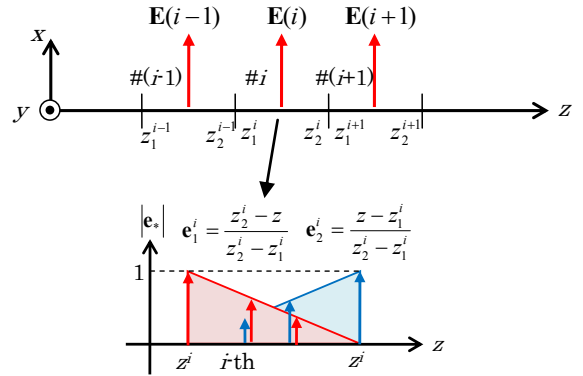


図 7 FEM の空間離散化と基底関数

有限要素法(FEM)[7]は周波数領域の解析法である。まずマクスウェルの方程式の 2 式から電界のみに対する波動方程式を導出する(磁界の波動方程式でもよいが、電界がよく用いられる)。そして変分原理に基づいて波動方程式の汎関数を求め、汎関数の極値探索問題を数値的に解く手法である。ところが、汎関数は一般には求まらないため、次式のように既知の重み関数  $\mathbf{W}$  で重み付けした弱形式が提案された。

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left( \nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) dv = 0 \quad (32)$$

$$\iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{W} \cdot \left( jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) \right] dv - \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\hat{n} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dS = 0 \quad (33)$$

$\mathbf{W}$  は任意の関数だが、特に電界の基底関数と同一のものを用いる場合は Galerkin 法といわれる。1次元問題の場合には弱形式は次のようになる。

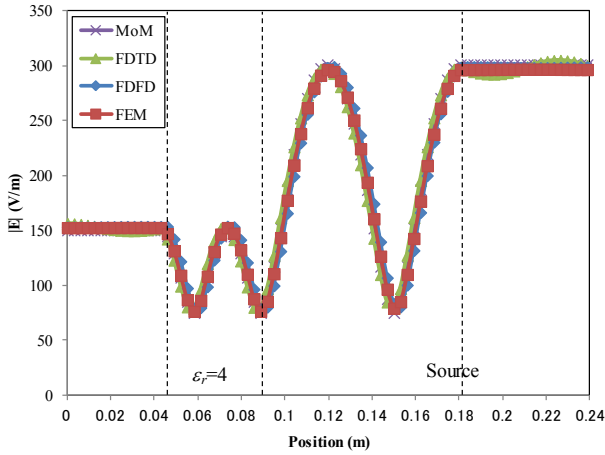
$$\int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial W_x}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0^2 \varepsilon_r W_x E_x + W_x \left( jk_0 \eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) \right] dz - \left[ \frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]_{z=z_1}^{z_2} = 0 \quad (34)$$

図 7 に示すように要素  $i$  内の電界は  $\mathbf{E}^i(z) = A_1^i \mathbf{e}_1^i(z) + A_2^i \mathbf{e}_2^i(z)$  で表される。全空間の電界は

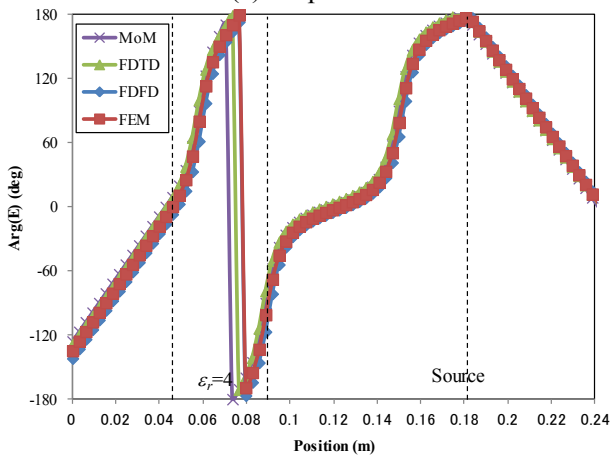
$$\mathbf{E}(z) = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{E}^i(z) = \sum_{i=1}^{N_e} \left( A_1^i \mathbf{e}_1^i(z) + A_2^i \mathbf{e}_2^i(z) \right) \quad (35)$$

で表される。電界の接線成分の境界条件より、





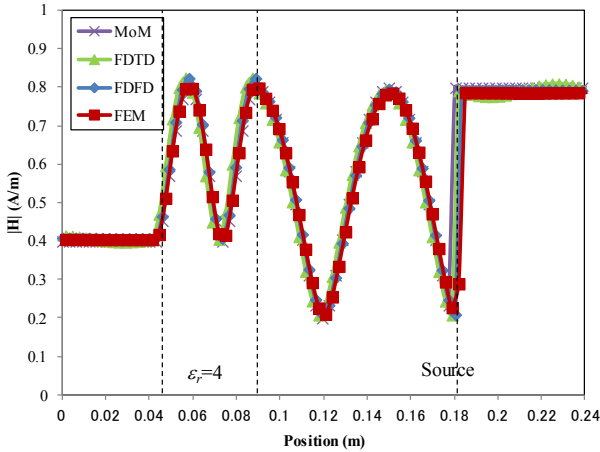
(a) Amplitude



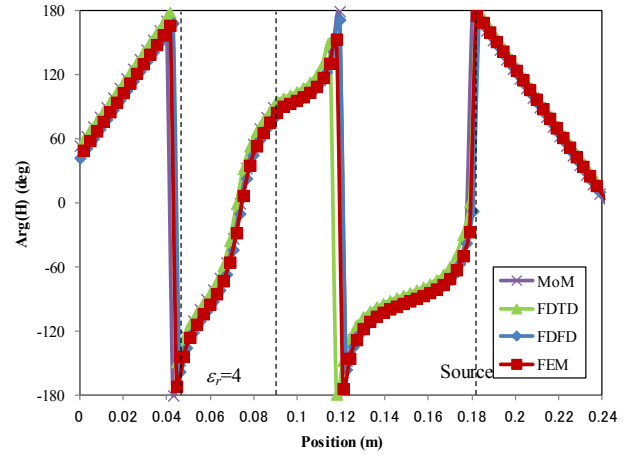
(b) Phase

図 9 電界分布

全解析手法の結果は良好に一致した。本解析モデルは1次元問題なので、MoMの解は厳密解と一致する。振幅分布より、 $z_1 \leq z \leq z_s$ の範囲で定在波が生じているのがわかる。また、磁界の定在波分布では電界とは山と谷が逆になる。FDTD法では正弦波入射させ、100周期後に各場所において1周期間の波形から複素フーリエ係数を計算して複素表現を得ている。



(a) Amplitude



(b) Phase

図 10 磁界分布

## 5. まとめ

1次元問題を用いて電磁界解析手法であるモーメント法(MoM), FDTD法, FDFD法, 有限要素法(FEM)の概要と基礎原理について紹介した。表1に各種解析手法の特徴をまとめた。全解析手法において結果は良好に一致した。また、勉強の一助となるように参考としてMathematica Ver.8による解析プログラムを付録に掲載した。

表 1 各種電磁界解析手法の特徴

解析法	特徴
モーメント法 (MoM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 周波数領域</li> <li>● メッシュ: 物体の境界、メッシュ形状は三角パッチ (柔軟性は高い)</li> <li>● 陰解法 (密行列)</li> <li>● 放射、散乱問題が得意</li> </ul>
FDTD法	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 時間領域</li> <li>● メッシュ: 空間全体、直方体格子 (柔軟性は高くない)</li> <li>● 陽解法 (前のステップの電磁界の値を用いて値を更新)</li> <li>● 人体など、複雑な組成・構造の解析が得意</li> <li>● 放射問題のためには吸収境界条件が必要</li> </ul>
有限要素法(FEM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 周波数領域</li> <li>● メッシュ: 空間全体、四面体要素 (柔軟性は高い)</li> <li>● 陰解法 (疎行列)</li> <li>● 放射問題のためには吸収境界条件が必要</li> </ul>

## 文 献

- [1] J.C. Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.
- [2] J.A. Stratton: Electromagnetic Theory, McGraw Hill, 1941.
- [3] 平野拓一, 広川二郎, 安藤真, "1次元問題を用いたモーメント法, FDTD法, 有限要素法の電磁界解析教育用プログラム," 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 112, no. 157, EST2012-31, pp. 143-148, 2012年7月.
- [4] R.F. Harrington: Field Computation by Moment Methods,





```
f = 2.45 * 109;
ω = 2 * π * f;
periodT = 1 / f;
c0 = 2.99792458 * 108;
ε0 = 107 / (4. * π * c02);
μ0 = 4. * π * 10-7;
γp0 = Sqrt[μ0 / ε0];
λ0 = c0 / f;
k0 = 2 * π / λ0;
edz = λ0 / 1000.000. ;

(*---- Modeling ----*)
z1 = 0.375 * λ0;
z2 = 0.75 * λ0;
zs0 = 1.5 * λ0;
ex[1] = 1.;
μx[1] = 1.;
k1 = k0 * Sqrt[ex[1] * μx[1]];
γp1 = γp0 * Sqrt[μx[1] / ex[1]];
ex[2] = 4.;
μx[2] = 1.;
k2 = k0 * Sqrt[ex[2] * μx[2]];
γp2 = γp0 * Sqrt[μx[2] / ex[2]];
ex[3] = 1.;
μx[3] = 1.;
k3 = k0 * Sqrt[ex[3] * μx[3]];
γp3 = γp0 * Sqrt[μx[3] / ex[3]];

(* Build Matrix *)
e1x[z_] := exJx[k1, γp1, Jx1, z1, z] + exMy[k1, γp1, My1, z1, z];
e2x[z_] := exJx[k2, γp2, -Jx1, z1, z] + exMy[k2, γp2, -My1, z1, z] +
  exJx[k2, γp2, Jx2, z2, z] + exMy[k2, γp2, My2, z2, z];
e3x[z_] := exJx[k3, γp3, -Jx2, z2, z] + exMy[k3, γp3, -My2, z2, z] +
  exJx[k3, γp3, 1., zs0, z];
ex[z_] := e1x[z] /; (z < z1);
ex[z_] := e2x[z] /; ((z1 ≤ z) && (z < z2));
ex[z_] := e3x[z] /; (z2 ≤ z);

h1y[z_] := hyJx[k1, γp1, Jx1, z1, z] + hyMy[k1, γp1, My1, z1, z];
h2y[z_] := hyJx[k2, γp2, -Jx1, z1, z] + hyMy[k2, γp2, -My1, z1, z] +
  hyJx[k2, γp2, Jx2, z2, z] + hyMy[k2, γp2, My2, z2, z];
h3y[z_] := hyJx[k3, γp3, -Jx2, z2, z] + hyMy[k3, γp3, -My2, z2, z] +
  hyJx[k3, γp3, 1., zs0, z];
h1y[z_] := h1y[z] /; (z < z1);
h2y[z_] := h2y[z] /; ((z1 ≤ z) && (z < z2));
h3y[z_] := h3y[z] /; (z2 ≤ z);

eqn = {ex[z1 - edz] == ex[z1 + edz],
  hy[z1 - edz] == hy[z1 + edz], ex[z2 - edz] == ex[z2 + edz],
  hy[z2 - edz] == hy[z2 + edz]};
sol = Solve[eqn][[1]]

Plot[Abs[ex[z]] /. sol, {z, 0, 2 * λ0}, PlotRange -> {0, Automatic}]
Plot[Abs[hy[z]] /. sol, {z, 0, 2 * λ0}, PlotRange -> {-180, 180}]
```

## A.2.2. FDTD 法

```
f = 2.45 * 109;
ω = 2 * π * f;
periodT = 1 / f;
c0 = 2.99792458 * 108;
ε0 = 107 / (4. * π * c02);
μ0 = 4. * π * 10-7;
λ0 = c0 / f;
lz = 2 * λ0;
dz = λ0 / 40.;
nz = Ceiling[lz / dz];
Do[
  ex[i] = 0.;
  hy[i] = 0.;
  , {i, 0, nz + 1}
];
Do[
  ex[i] = 4.;
  , {i, 15, 30}
];

(*---- Modeling ----*)
Do[
  ex[i] = 1.;
  μx[i] = 1.;
  σ[i] = 0.;
  , {i, 0, nz + 1}
];
Do[
  ex[i] = 4.;
  , {i, 15, 30}
];
```

```
ntstep = nperiod + 1;
Do[
  (*---- Update E-field ----*)
  ex2[0] = ex[0]; (* for Mur-1st order ABC *)
  ex2[1] = ex[1]; (* for Mur-1st order ABC *)
  ex2[2] = ex[nz]; (* for Mur-1st order ABC *)
  ex2[3] = ex[nz + 1]; (* for Mur-1st order ABC *)
  Do[
    ex[i] = 1 - σ[i] * dt / (2 * ε0 * dz) * ex[i] + dt / (ε0 * dz) * (hy[i] + hy[i - 1]) - dt / (ε0 * dz) * ecurl[nt, i] / (1 + σ[i] * dt / (2 * ε0 * dz)) + ecurl[nt, i] / (1 + σ[i] * dt / (2 * ε0 * dz));
    et[i, Mod[nt, nperiod]] = ex[i];
    , {i, 1, nz}
  ];
  (*---- ABC ----*)
  ex[0] = ex2[1] * (c0 * dt - dz) / (c0 * dt + dz) + (ex[1] - ex2[0]);
  ex[nz + 1] = ex2[2] * (c0 * dt - dz) / (c0 * dt + dz) + (ex[nz] - ex2[3]);
  (*---- Update H-field ----*)
  Do[
    hy[i] = hy[i] - dt / (μ0 * dz) * (ex[i + 1] - ex[i]);
    , {i, 0, nz}
  ];
  nt++;
  , {n, 1, ntstep}
];
DiscretePlot[ex[i], {i, 1, nz}]
DiscretePlot[hy[i], {i, 1, nz}]
(*---- Complex Expression ----*)
Do[
  (* "I" is to translate cos from sin *)
  ec[i] = 2 / (nperiod * dt) * Sum[et[i, Mod[nt - nperiod + 1 + j, nperiod]] * Exp[-I * ω * (nt - nperiod + 1 + j) * dt], {j, 0, nperiod - 1}] * I;
  , {i, 1, nz}
];
DiscretePlot[Abs[ec[i]], {i, 1, nz}, PlotRange -> {0, Automatic}]
DiscretePlot[Arg[ec[i]] * (180 / π), {i, 1, nz}]
```

## A.2.3. FDFD 法

```
f = 2.45 * 109;
ω = 2 * π * f;
periodT = 1 / f;
c = 2.99792458 * 108;
ε0 = 107 / (4. * π * c2);
μ0 = 4. * π * 10-7;
λ0 = c / f;
lz = 2 * λ0;
dz = λ0 / 40.;
nz = Ceiling[lz / dz];
Do[
  a[i, j] = 0.;
  , {i, 0, 2 * (nz + 2) - 1}, {j, 0, 2 * (nz + 2) - 1}
];
(*----- Excitation -----*)
ecurl[i_] := If[i == 60, 1., 0.];
(* Build Matrix *)
Do[
  (* Faraday : ex[i+1] - ex[i] + I * ω * μ0 * dz * hy[i] == 0 *)
  a[i, i] = -1.;
  a[i, i + 1] = 1.;
  a[i, (nz + 2) + 1] = I * ω * μx[i] + μx[i] / 2 * μ0 * dz;
  (* Ampere : I * ω * ε0 * dz * ex[i] - hy[i] + hy[i - 1] == 0 *)
  a[(nz + 2) + 1, i] = -(I * ω * ε0 + σ[i]) * dz;
  a[(nz + 2) + 1, (nz + 2) + 1 - 1] = 1.;
  a[(nz + 2) + 1, (nz + 2) + 1] = -1.;
  , {i, 1, nz}
];
```

```
(* Absorbing Boundary Condition *)
a[0, 0] = I * ω * dz + 2 * c;
a[0, 1] = I * ω * dz - 2 * c;
a[nz + 1, nz] = I * ω * dz - 2 * c;
a[nz + 1, nz + 1] = I * ω * dz + 2 * c;
a[nz + 2, nz + 2] = I * ω * dz + 2 * c;
a[nz + 2, nz + 2 + 1] = I * ω * dz - 2 * c;
a[2 * (nz + 2) - 1, 2 * (nz + 2) - 2] = I * ω * dz - 2 * c;
a[2 * (nz + 2) - 1, 2 * (nz + 2) - 1] = I * ω * dz + 2 * c;
ma = Table[a[i, j], {i, 0, 2 * (nz + 2) - 1}, {j, 0, 2 * (nz + 2) - 1}];
vx = Flatten[{Table[ex[i], {i, 0, nz + 1}], Table[hy[i], {i, 0, nz + 1}]}];
vb = Flatten[{Table[0., {i, 0, nz + 1}], Table[ecur[i], {i, 0, nz + 1}]}];
(* Solve [ma.vx==vb, vx]: *)
sol = LinearSolve[ma, vb];
ListPlot[Abs[Take[sol, nz + 2]], PlotRange -> {0, All}, PlotStyle -> {Red}]
ListPlot[Abs[Take[sol, -(nz + 2)]], PlotRange -> {0, All}]
ListPlot[Arg[Take[sol, nz + 2]] * (180. / π), PlotRange -> {-180, 180},
PlotStyle -> {Red}]
ListPlot[Arg[Take[sol, -(nz + 2)]] * (180. / π), PlotRange -> {-180, 180}]
```

### A.2.4. 有限要素法(FEM)

```
f = 2.45 * 109;
ω = 2 * π * f;
periodT = 1 / f;
c = 2.99792458 * 108;
e0 = 107 / (4. * π * c2);
μ0 = 4. * π * 10-7;
rj0 = sqrt(μ0 / e0);
λ0 = c / f;
k0 = 2 * π / λ0;
lz = 2 * λ0;
dz = λ0 / 40.;
nz = Ceiling[lz / dz];
nelem = nz;
```



```
(*---- Modeling ----*)
Do[
  ex[i] = 1.;
  μx[i] = 1.;
  σ[i] = 0.;
  , {i, 1, nelem}
];
Do[
  ex[i] = 4.;
  , {i, 15, 30}
];
```

```
(*----- Excitation -----*)
ecur[i_] := If[i == 60, 1., 0.];
(* Build Table *)
Do[
  globEdgeNo [elem, 1] = elem;
  globEdgeNo [elem, 2] = elem + 1;
  , {elem, 1, nelem}
];
posz [gedge_] := dz * (gedge - 1);
em [elem_, m_, n_] :=
  If[m == n, 1 / (posz [globEdgeNo [elem, 2]] - posz [globEdgeNo [elem, 1]]),
  1 / (posz [globEdgeNo [elem, 1]] - posz [globEdgeNo [elem, 2]])];
fm [elem_, m_, n_] :=
  If[m == n, (posz [globEdgeNo [elem, 2]] - posz [globEdgeNo [elem, 1]]) / 3,
  (posz [globEdgeNo [elem, 2]] - posz [globEdgeNo [elem, 1]]) / 6];
```

```
(* Build Matrix *)
Do[
  b[i] = 0.;
  Do[
    a[i, j] = 0.;
    , {j, 1, nelem + 1}
  ]
  , {i, 1, nelem + 1}
];
Do[
  (* Element Matrix *)
  melem [1, 1] = 1 / μx [elem] * em [elem, 1, 1] - k02 * ex [elem] + fm [elem, 1, 1];
  melem [2, 2] = 1 / μx [elem] * em [elem, 2, 2] - k02 * ex [elem] + fm [elem, 2, 2];
  melem [1, 2] = 1 / μx [elem] * em [elem, 1, 2] - k02 * ex [elem] + fm [elem, 1, 2];
  melem [2, 1] = 1 / μx [elem] * em [elem, 2, 1] - k02 * ex [elem] + fm [elem, 2, 1];
  velem [1] = -I * k0 * rj0 * ecur [elem] / 2;
  velem [2] = -I * k0 * rj0 * ecur [elem] / 2;
  (* Assembly *)
  a [globEdgeNo [elem, 1], globEdgeNo [elem, 1]] += melem [1, 1];
  a [globEdgeNo [elem, 1], globEdgeNo [elem, 2]] += melem [1, 2];
  a [globEdgeNo [elem, 2], globEdgeNo [elem, 1]] += melem [2, 1];
  a [globEdgeNo [elem, 2], globEdgeNo [elem, 2]] += melem [2, 2];
  b [globEdgeNo [elem, 1]] += velem [1];
  b [globEdgeNo [elem, 2]] += velem [2];
  , {elem, 1, nelem}
];
(*---- Absorbing Boundary Condition ----*)
a [globEdgeNo [1, 1], globEdgeNo [1, 1]] -= (-I * k0 * sqrt[ex [1] * μx [1]] / μx [1]);
a [globEdgeNo [nelem, 2], globEdgeNo [nelem, 2]] +=
  (I * k0 * sqrt[ex [nelem] * μx [nelem]] / μx [nelem]);
(* Solve [ma.vx==vb, vx]: *)
ma = Table[a[i, j], {i, 1, nelem + 1}, {j, 1, nelem + 1}];
vb = Table[b[i], {i, 1, nelem + 1}];
sol = LinearSolve[ma, vb];
(* Output *)
ListPlot[Abs[sol], PlotRange -> {0, All}, PlotStyle -> {Red}]
ListPlot[Arg[sol] * (180. / π), PlotRange -> {-180, 180}]
```