共振回路のQファクタ

Quality Factor for Resonant Circuits

大 平　孝　（豊橋技術科学大学）

Takashi Ohira, Toyohashi University of Technology

あらまし　単一LCR直列回路のQファクタがωL/Rであることは電気回路の教科書ですぐにみつかる。これが実際の高周波共振回路となるとLやCが複数含まれることがありQファクタ公式がみあたらない。様々なトポロジをもつ回路の共振Qファクタを求めるにはどうすればよいのだろうか。この疑問に答えるには、そもそもQファクタとはなにかという基本的考察に立ち戻らなければならない。この講座では、与えられた回路図から紙と鉛筆でその共振周波数ならびにQファクタを求める技を述べる。参加者は単に説明を聞くだけでなく、教室のホワイトボードや各自のノートで具体的な演習課題に挑戦することで確実な理解を目指す。

Abstract - Everyone can find a series LCR topology with its quality factor formula Q = ωL/R in a usual textbook. Practical circuits however have more complex topologies, and their Q factor equations are not found at once. Even career engineers often meet difficulties to estimate ones with distributed elements. To find a solution, we have to go back to the basic consideration on what the Q factor is. This lecture gives a fundamental theory and a sophisticated technique on how to derive Q factor formula for a variety of resonant circuits with a pencil and paper. Participants have chances not only to just listen to what is elaborated but also to positively take part in challenging oneself to the provided exercises on their notebooks or on the classroom whiteboard.

キーワード：共振回路、共振周波数、Qファクタ、反射係数、周波数傾斜、ポートインピーダンス

Keywords: resonant circuit, resonant frequency, quality factor, reflection coefficient, frequency slope, port impedance

1　まえがき

共振回路とはインダクタ、キャパシタ、伝送線路などの受動素子、および１個の信号入出力ポートからなり、かつ特定の周波数成分だけに強く反応する回路網と定義される。ここでいう強く反応するとはポートから回路を見込んだイミタンス（インピーダンスまたはアドミタンス）が信号の周波数によって鋭敏に変化することである。この性質を利用して、共振回路はフィルタ、発振器、弁別器などに広く用いられる。

周波数の微小変化に対するイミタンスの変化量が大きいほど共振回路として性能が高い。この性能を示す指標がQファクタである。逆に、増幅器やアンテナなど広帯域で用いられるコンポーネントではQファクタが低いことが望まれる。いづれの場合も共振回路のQファクタは高性能化設計の指針となる。Qファクタは回路トポロジーおよび回路を構成する受動素子のパラメータ値で決まる。例えば、最も単純なLC共振回路では、共振周波数をω、直列抵抗成分をRとすると、ω^2＝１／LC、Q＝ωL／Rである。これが現実の回路ではLCが複数個含まれることがあり、その共振周波数やQファクタを求める公式は単純ではない。さらに、信号周波数が高周波帯になると、本来の共振素子に加えてその周辺に接続される他の素子ならびにそれらに寄生するLCR成分も共振特性に影響を与えるようになる。

本講座では、どのような構成の受動回路がどのような周波数で共振するかを求める方法を学ぶ。さらに、その共振周波数におけるQファクタをどうやって計算すればよいのかをフローチャートを用いてわかりやすく解きほぐすとともに、いくつかの例題演習により具体的計算手法を説明する。

2　ポートパラメータ

共振回路は信号エネルギを外部とやりするためのポートを１個備えている。これをブラックボックスとして表現すると図１に示す１ポート回路になる。つまり、共振回路を利用するユーザ側の立場からすると、その内部構造には興味なく、ポートから回路側をみた観測量だけで性能を記述する。このような考え方に基づく観測量をポートパラメータと呼ぶ[1]。図１に示す１

ポート回路のポートパラメータとしてポートインピーダンス（入力インピーダンスまたは単にインピーダンスとも呼ばれることもある）を用いる。

インピーダンスは一般に複素数であり、かつ、入力信号周波数$\omega=2\pi f$の関数であるので

$$z(\omega) = r(\omega) + j\,x(\omega)$$

と書く。あるいはその逆数であるアドミタンス

$$y(\omega) = \frac{1}{z(\omega)} = g(\omega) + j\,b(\omega)$$

を用いた方が便利なこともある。z(ω)とy(ω)を総称してポートイミタンスと呼ぶ[1]。さらに、z(ω) または y(ω) から換算できる反射係数

$$\Gamma(\omega) = \frac{z(\omega) - z_0}{z(\omega) + z_0} = \frac{1 - z_0 y(\omega)}{1 + z_0 y(\omega)}$$

を用いる場合もある。ここで z_o は観測系の基準インピーダンスであり、高周波帯では通常 $z_o = 50\ \Omega$ である。なお Γ(ω) は１ポート$S_{11}(\omega)$ と書かれることもある。Γ(ω) は z(ω) または y(ω) からの１対１等角写像であり

$$z(\omega) = z_0 \frac{1 - \Gamma(\omega)}{1 + \Gamma(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1 + \Gamma(\omega)}{1 - \Gamma(\omega)}$$

で逆算できる。

先に述べたように、１ポート回路の性能はポートパラメータだけで完全に語り尽くすことができる。つまり、これら z(ω)、y(ω)、Γ(ω)のうちどれか１つがわかれば、そこから共振回路としての特徴量である共振周波数やQファクタも定まるということである。

３　共振周波数

前節で述べた１ポート回路のポートインピーダンス z(ω) が実数となる周波数、すなわち z(ω) の虚部がゼロとなる周波数をその回路の共振周波数と呼ぶ。つまり共振周波数を$\omega_o=2\pi f_0$と書くと

$$\Im m\left\{z(\omega_0)\right\} = 0$$

である。これを共振条件式と呼ぶ。記号 $\Im m$ は複素数から虚部を抽出する演算子である。ある周波数において z(ω) が実数となるなら、そのときその逆数であるポートアドミタンス y(ω) も実数となる。またその逆も明らかに真である。よって共振条件式は

$$\Im m\left\{y(\omega_0)\right\} = 0$$

と書くこともできる。さらに、そのとき反射係数 Γ(ω) も実数となるので

$$\Im m\left\{\Gamma(\omega_0)\right\} = 0$$

と書くこともできる。つまり、共振周波数とはスミスチャート上でイミタンス軌跡（あるいは反射係数軌跡）が横軸をよぎる周波数である。

最初の例として図２に示すLC直列共振回路を考える。簡単のため損失要因は直列抵抗Rだけであるとする。この回路のポートインピーダンスは

$$z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

である。これを共振条件式に代入すると

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

となる。 左辺末項は j が分母にあったので符号が負に変わっていることに注意しよう。 この条件式をω_oにつ

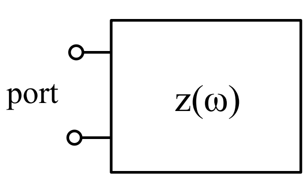

図１　共振回路のブラックボックス表現

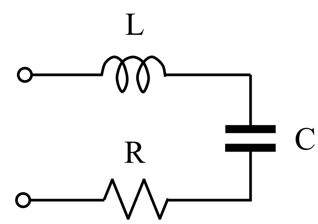

図２　LC直列共振回路

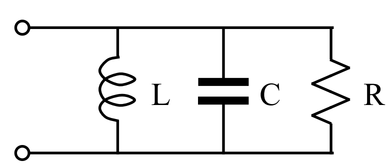

図３　LC並列共振回路

いての方程式とみて解くと、よく知られた公式

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

を得る。共振周波数はLCだけで決まり、Rに無関係である。得られたω_0をもとの $z(\omega)$ の式に代入すると

$$z(\omega_0) = R$$

となり確かにポートインピーダンスが実数となっていることが確認できる。

次にこれと双対をなす例を図３に示す。損失の要因をキャパシタの漏洩抵抗Rで表している。この場合は全ての素子が並列に接続されているのでポートインピーダンスよりもポートアドミタンス

$$y(\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

から出発する方が計算しやすい。 $y(\omega)$ についての共振条件式より

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

を得る。この場合も共振周波数はLCだけで決まり、Rに無関係である。このときポートアドミタンスは実数

$$y(\omega_0) = \frac{1}{R}$$

となる。

最後に直列と並列が混在した例を図４に示す。LとCは互いに直列の関係にあるが、損失抵抗がCと並列になっている。この回路のポートインピーダンスは

$$z(\omega) = j\omega L + \frac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C}$$

である。この $z(\omega)$ は前の２例と異なり分母に実部と虚部がある。これをそのまま共振条件式に代入するとや

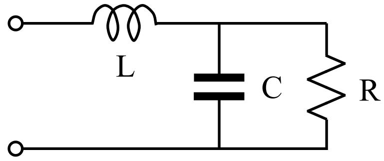

図４　並列損失抵抗があるLC直列共振回路

や複雑である。この複雑性を解消するため、$j\omega L$を左辺へ移項し、分母をはらって

$$\left\{z(\omega) - j\omega L\right\}\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) = 1$$

と変形する。この状態で共振条件を適用する。つまり、共振周波数ω_0において $z(\omega)$ が実数になることに着目する。これにより、左辺を展開した際に実部と虚部に分解できる。実部、虚部を抽出するとそれぞれ

$$\frac{z(\omega_0)}{R} + \omega_0^2 LC = 1$$

$$z(\omega_0)C - \frac{L}{R} = 0$$

となる。これらを ω_0と $z(\omega_0)$ についての連立方程式とみて解くと

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{C^2R^2}}$$

$$z(\omega_0) = \frac{L}{CR}$$

を得る。共振周波数はLCだけでは定まらない。損失Rの存在により ω_0が低下し、$R^2 = L/C$ のとき $\omega_0 = 0$ となる。

4　Qファクタ

任意構成の回路のQファクタを導出するために「そもそもQファクタとは何か」という議論に立ち戻ろう。Qファクタを説く道は以下のように複数あり、説得力・計算容易性・実用性の観点から一長一短がある。

１）半値幅

回路理論の教科書では共振回路の節には電圧振幅の周波数特性がピークをもつグラフが描かれており、その半値幅Δf と中心周波数 f_0との比を用いてQファクタを説明している。これは直感的に理解しやすい。しかしこれは、振幅の周波数特性が左右対称の理想的な単峰性曲線となることを暗に仮定しているため一般性に欠ける。また回路シミュレータを用いる場合には中心周波数近傍で振幅特性を連続的に計算する必要があるためあまり実用的でない。

２）エネルギ損失

物理の教科書ではLCなどのリアクタンス素子に蓄積されている電磁エネルギが時間的に減衰していく割合に基づいてQファクタを説明していることが多い。これは

物理現象として説得性がある。しかし残念なことに、これら電磁と回路の周波数特性との関係が表現されていない。回路設計者の立場からみて直接使えない。例えば、ある回路のある周波数におけるＳパラメータがわかっていたとしても、そこから電磁エネルギを一義的に決定することができない。百歩譲って、内部トポロジが既知で回路方程式をたてることができたとしても、そこから各素子の電磁エネルギを全て計算するのは手間がかかる。さらに困るのは、回路製作後の測定で電磁エネルギを直接確認できないということである。これらの理由により設計現場ではほとんど用いられていない。

３）位相傾斜

高周波の教科書では振幅ではなく位相の周波数特性でQファクタを説明している。つまり、中心周波数における反射係数の位相傾斜が大きい程Qが高いと定義する。この方法により、回路の内部トポロジを知ることなく、ポートパラメータだけからQを求めることができる。回路製作後に測定で値を確認することもできるので実用的である。しかし、振幅特性を全く無視しているため、必ずしも正しい値が得られるとは限らない。例えば、回路設計段階で、位相傾斜だけを目的関数として回路パラメータを最適化してしまうと、位相傾斜は十分大きくなったが振幅損失も大きくなってしまったという状態に陥る危険性がある。この方法は万能とはいえない。

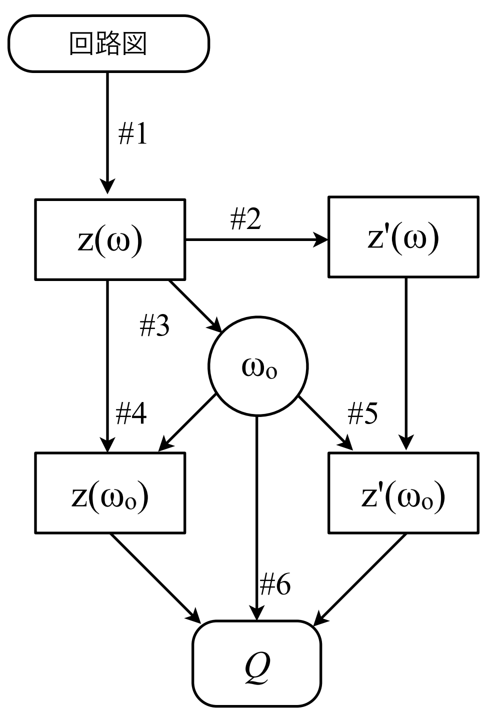

図５　回路図からω_oとQファクタを求める手順

４）複素傾斜

上記の欠点を解決する方法として複素傾斜がある。振幅と位相の両方の周波数特性を加味してQファクタを求める。上記３）の方法と類似しているが、位相だけでなく振幅の周波数特性も正しく加味しているところが異なる。中心周波数におけるポートインピーダンスから

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{z'(\omega_0)}{z(\omega_0)}\right|$$

でQファクタを計算する[1]。ここでの主役はポートインピーダンスの周波数傾斜

$$z'(\omega) = \frac{dz(\omega)}{d\omega}$$

である。$z'(\omega)$ 自体はインダクタンスの次元を持つ複素数である。これを $z(\omega)$ で正規化し、かつ、ω_oを乗じ、さらに絶対値をとる。これによりQファクタが無次元スカラ実数となる。このQファクタはイミタンスの定数倍・時間反転・双対操作に対して不変量である[2]。ここでいう双対操作とは $z(\omega)$ と $y(\omega)$ の交換を意味し

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{y'(\omega_0)}{y(\omega_0)}\right|$$

$$y'(\omega) = \frac{dy(\omega)}{d\omega}$$

と表せる。さらに、自然対数関数の微分公式

$$\left\{\ln f(x)\right\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

を用いれば

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\left\{\ln z(\omega_0)\right\}'\right|$$

または

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\left\{\ln y(\omega_0)\right\}'\right|$$

と表現することもできる。

このQファクタ公式は数学的に美しいだけでなく、物理的に可観測量である。回路製作後に実測で設計値と比較確認することができる。ものづくりの観点から見ても実用的である [3][4]。

5　例題演習

共振回路の回路図から共振周波数とQファクタを求めるための一連の手順を図５に示す。回路図からポートイミタンスを記述し（＃１）、それが実数になる条件から ω_0 と $z(\omega_0)$ を求めるステップ（＃３と＃４）については既に前々節で述べた。以下ステップ＃６までについて、図２～４に示した回路例で順次説明する。

１）直列共振回路

＃１：図２に示す回路のポートインピーダンスは

$$z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

＃２：その周波数傾斜は上式を ω で微分して

$$z'(\omega) = jL - \frac{1}{j\omega^2 C}$$

＃３： $\omega = \omega_0$ で $z(\omega)$ が実数になる条件から

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

＃４：これを $z(\omega)$ に代入して

$$z(\omega_0) = R$$

＃５：同じく $z'(\omega)$ に代入して

$$z'(\omega_0) = jL - \frac{1}{j\omega_0^2 C}$$

$$= j2L$$

＃６：これらよりQファクタが

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{z'(\omega_0)}{z(\omega_0)}\right|$$

$$= \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{j2L}{R}\right|$$

$$= \frac{\omega_0 L}{R}$$

と求まる。

２）直列共振回路

＃１：図３に示す回路のポートアドミタンスは

$$y(\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

＃２：上式を ω で微分して

$$y'(\omega) = jC - \frac{1}{j\omega^2 L}$$

＃３： $\omega = \omega_0$ で $y(\omega)$ が実数になる条件から

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

＃４：これを $y(\omega)$ に代入して

$$y(\omega_0) = \frac{1}{R}$$

＃５：同じく $y'(\omega)$ に代入して

$$y'(\omega_0) = jC - \frac{1}{j\omega_0^2 L}$$

$$= j2C$$

＃６：これらよりQファクタが

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{y'(\omega_0)}{y(\omega_0)}\right|$$

$$= \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{j2C}{1/R}\right|$$

$$= \omega_0 CR$$

と求まる。

３）直並列共振回路

＃１：図４に示す回路のポートインピーダンスは

$$z(\omega) = j\omega L + \frac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C}$$

$$= \frac{R - \omega^2 LCR + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$

＃２：この式は分母にも分子にも実部と虚部を含んでいる。これをそのまま ω で微分してもよいが少し複雑になる。そこでこの場合は自然対数微分を用いるのが簡明である。つまり

$$\ln z(\omega) = \ln\frac{R - \omega^2 LCR + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$

$$= \ln\left(R - \omega^2 LCR + j\omega L\right) - \ln\left(1 + j\omega CR\right)$$

こうしておいてから ω で微分すると

$$\left\{\ln z(\omega)\right\}' = \frac{-2\omega LCR + jL}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} - \frac{jCR}{1 + j\omega CR}$$

となる。一見これも複雑に見える。それが次のステップで共振条件を適用することにより、痛快に見通しが開ける。

＃３： ω_0 は前節で求めたとおり

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{C^2R^2}}$$

である。この関係を使いやすくするため

$$1 - \omega_0^2 LC = \frac{L}{CR^2}\ ,\ \ 1 + \omega_0^2 C^2 R^2 = \frac{CR^2}{L}$$

と変形しておく。

＃４＋＃５：この条件を＃２で得た式に適用すると

$$\left\{\ln z(\omega_0)\right\}' = \frac{-2\omega_0 LCR + jL}{\frac{L}{CR} + j\omega_0 L} - \frac{jCR}{1 + j\omega_0 CR}$$

$$= \frac{-2\omega_0 C^2 R^2}{1 + j\omega_0 CR}$$

＃６：この結果を対数微分のQファクタ式に代入して

$$Q = \frac{\omega_0}{2}\left|\left\{\ln z(\omega_0)\right\}'\right|$$

$$= \frac{\omega_0}{2}\left|\frac{-2\omega_0 C^2 R^2}{1 + j\omega_0 CR}\right|$$

$$= \frac{\omega_0^2 C^2 R^2}{\sqrt{1 + \omega_0^2 C^2 R^2}}$$

となる。これに＃３で示した共振条件を再び適用すると

$$Q = \omega_0^2 CR\sqrt{LC}$$

$$= \omega_0\sqrt{C^2R^2 - LC}$$

を得る。これが図４の回路のQファクタである。この結果から以下の３点がわかる。

１）R = ∞ のとき Q = ∞

２）有限のRにより損失が発生しQが下がる

３）$R^2 = L/C$ のとき $\omega_0 = 0$ と同時に Q = 0

本節で述べた方法で様々なトポロジの受動回路のQファクタの公式を手計算で導きだすことができる。得られた公式により、素子定数をどのように変えると共振性能がどのように変わるかが見とおしよく理解できる。

6　むすび

共振とは受動回路がそのポートからみたイミタンスの虚部がゼロとなる状態である。与えられた回路のイミタンスを周波数の関数として求めて、その虚部＝０という方程式を ω を未知数として解くことにより共振周波数が求まる。数個程度の素子からなる規模の回路であれば、回路図から紙と鉛筆でイミタンスを導くことができる。さらに複雑な回路構成の場合には回路図からイミタンスを計算する部分とその周波数傾斜を数値微分で計算する部分を回路シミュレータに行わせることにより計算機で共振周波数ならびにQファクタを求めることができる。その場合も一連の計算手順を簡単な回路構成を用いた本講座の演習で理解しておくことが有効である。

謝辞　本講座テキスト執筆に際し貴重なご意見を頂いたリューテック粟井郁雄社長に深謝する。

文　献

[1] 大平 孝, " 行列ができる回路演習：アナログ回路を紙と鉛筆で考えよう ", 電子情報通信学会誌 連載講座, vol. 93, issue 1, pp. 67-72, Jan. 2010.

[2] T. Ohira and K. Araki, " Active Q factor and equilibrium stability formulation for sinusoidal oscillators ", IEEE Trans. Circuits and Systems Part II, vol. CASII-54, issue 9, pp. 810-814, Sept. 2007.

[3] S. Takeda et al, " A consideration on numerical calculation of Q-factors in oscillation circuit based on formulation of S parameters ", Asia-Pacific Microwave Conference, APMC2010, WE3G-39, pp. 508-511, Dec. 2010.

[4] T. Morimasa et al, " Experimental confirmation of phase noise dependency on oscillator's Q factor ", Korea-Japan Microwave Conference, KJMW2011, Fukuoka, Nov. 2011.

[5] 大平 孝, " 発振回路の基礎：NINO の概念とインポート行列法", Asia-Pacific Microwave Conference, APMC2010, 基礎講座テキスト, pp. 53-58, 横浜, Dec. 2010.