情報理論とサンプリングの基礎
Basics of Information Theory and Sampling
–“as your mother would tell you”-

神谷　幸宏

Yukihiro Kamiya

東京農工大学大学院共生科学技術研究院

Institute of Symbiotic Science and Technology, Tokyo University of Agriculture & Technology

Koganei, Tokyo 184-8588, Japan

Tel. / Fax: +81-42-388-7061, ykamiya@cc.tuat.ac.jp

Abstract

This session aims to provide an overview of Shannon’s information theory as well as the sampling theory through comprehensive explanations “as your mother would tell you”. Information theory is beautiful, but an abstractive theory that is not easy to catch its essence. In this session, images of the abstractive theories will be explained as comprehensive as possible to understand the essence.

1　はじめに

1946 年，クロード・シャノンによる “ Mathematical theory of communications ” [1]の出版から始まる情報理論は，近年のデジタル通信の急速な発展に伴い，ますます重要性を増している. 情報理論以前の通信技術の興味の対象は，受信信号波形の忠実な再生にあった．しかしシャノンの情報理論は，通信とは信号波形のやりとりではなく，情報の伝送であることを明確にしたといえる．その理論は大変美しいものである．まず “ 情報量 ” によって情報を定量化した後，情報源の性質を “ 情報エントロピー ” で表す. これらを用いて通信路容量を導出している．その結果はよく知られている通り，次式で表される．

$$C = B_W \log_2\left(1 + \frac{P_S}{N_0 B_W}\right) \tag{1}$$

ここで，C は通信路容量[bit/sec]， B_W は信号帯域幅 [Hz]，P_S 及び N_0 はそれぞれ信号電力及び単位帯域幅における雑音電力である. 変調方式，誤り訂正符号技術，フィルタ技術，アンテナダイバージティと様々な技術がある中，結局，得られる伝送速度の最大値は帯域幅と SN 比によってこのように規定されてしまうことは大変興味深い．また，このような上限を理論的に明らかにしていることにシャノンの情報理論の偉大さがある．

しかしその内容は非常に抽象的であり，その概念の体得は簡単ではない．その一方で，(1)の導出過程を理解することは情報伝送の本質を理解する上で重要である．本基礎講座ではその導出をゴールとして情報理論を平易に，本質を理解することを目的として詳述する．併せて，情報理論を通して標本化定理の導出にも触れ，近年のソフトウェア無線技術[2]等で改めて重要性を増している A/D 変換についても述べる．

2　情報理論の基礎

2.1　情報量と平均情報量（情報エントロピー）

情報理論は，情報を定量化することから始まる[3]．電気通信に限定せず，一般的に情報というものを考えると，その定量化はどのように考

えればよいのだろうか．情報とは，人間がその価値を見出すものであり，自然現象ではない．このため，電圧や電流と言った物理量と異なり，定量化は難しい．しかし定量化しなければ理論的に取り扱うことができないため，情報量を次のように定義する．

$$I(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)} = -\log_2 P(E) \quad \text{[bit]} \quad (2)$$

ここで$P(E)$は事象Eが発生する確率であり，$I(E)$はその事象の情報量である．情報量の単位は bit である．その意味するところを考える．まず，対数の中身を見ると，E の発生確率の逆数となっている．このことは，“珍しい出来事ほど情報量が大きくなる”ことがわかる．例えば，サッカーで対戦するチームに圧倒的な実力の差があり，A チームはプロ，B チームは小学生チームであったとする．試合を真剣勝負で行うと，プロである A が勝つことが誰にも予想され，そうなる確率が圧倒的に高い．試合後，「A が勝った」という結果を聞かされたとき，別に驚かない．わざわざ教えてくれなくてもいいとさえ思える．しかし，もし B が勝ち，それを知らされた時，非常に驚く．後者のニュースバリューが高いことは，日常感覚として理解できる．このニュースバリューは，出来事の珍しさに比例し，それは生起確率に反比例する，ということがわかる．

では，生起確率の逆数に 2 を底とする対数をとるのはなぜだろうか．これは，“生起確率の逆数”として得られた量を 0 と 1 の羅列で表現した時，必要なビット数を得るためである．次のような簡単な例がある．0 と 1 のみからなる 5 ビットの組み合わせは，2^5=32 種類ある．今，これら32種の5ビット系列のうちから一つを無作為に選ぶとすると，その確率は 1/32 となる．この 1/32 という確率は，0 と 1 の 2 つのシンボルで表現すると，必要なビット数は$-\log_2(1/32)$となって，確かに 5 ビットとなり，元の系列のビット長と一致するのである．

一つの事象について，その事象が持つ情報の量を定量化する方法はこれで明らかとなった．

今，ある情報源を考え，そこからは様々なシンボルが次々と出力されてくる．“情報源”とは情報の発生源であり，あらゆるものが考えられるが，任意の記号や文字などを出力するものとする．例えば，英字新聞を情報源であるとすると，英語の文字 A~Z，数字，コンマ等がシンボルとして出力される．簡単のため，情報源から出力されるシンボルが A から Z までの 26 文字に限定されるとする．この時，それぞれの文字を“情報源シンボル”と呼び，その集合 A~Z の 26 文字を“情報源アルファベット”と呼ぶ（“情報源アルファベット”は情報源シンボルの集合を意味しているのであって，英語の“アルファベット”を例に使用しているからではないことに注意を要する．）．この情報源が持つ情報量はどのように考えればよいだろうか．A~Z に含まれる各文字が英文に登場する確率は均等に 1/26 とはなっていないので，文字毎に情報量も異なる．このため，それぞれの情報源シンボルの生起確率を調べて情報量を求め，その期待値を情報源の平均情報量とするのである．ある情報源 S の平均情報量は次式で表される．

$$H(S) = \sum_{i=1}^{r} P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} \quad \text{[bit/symbol]} \quad (3)$$

ここで，$s_1, s_2, \cdots, s_r$ は情報源シンボルであり，$P(s_i)$は i 番目情報源シンボルの生起確率である．すべての情報源シンボルの情報量から 1 シンボル当りの情報量の期待値を求めているため，単位は[bit/symbol]である．

今，情報源シンボルが s_1 と s_2 しかなく，生起確率はそれぞれ p, q であるものとすると，平均情報量は $P(s_1) = p$，$P(s_2) = q = 1 - p$ となるので，$H(S)$ は p のみの関数となり，次式で表される．

$$H(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \quad (4)$$

これをエントロピー関数と呼ぶ．この式で，確

率 p を 0 から 1 まで変化させたと，$H(p)$ の値をプロットすると，図 **1** のようになり，$H(p)$ が最大となるのは $p=q=0.5$ となる時であることがわかる．

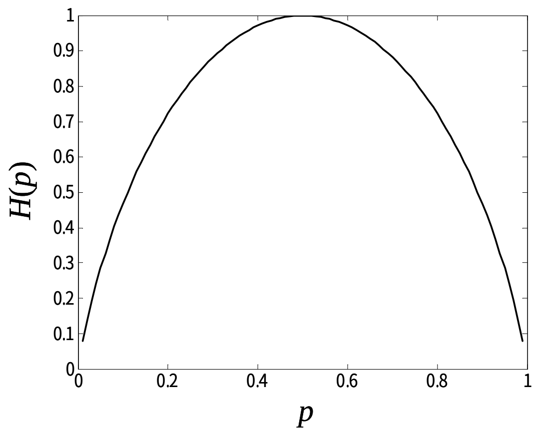


図 1　エントロピー関数

つまり，シンボル s_1 と s_2 が等確率で発生し，次のシンボルが何であるかまったく予想ができないとき，出てくるシンボルの情報量の期待値は最大になる．このことは，情報量の説明で述べたサッカーの例を考えても理解できる．このことは言い方を変えると，“無秩序な情報源ほど平均情報量が大きい” と言え，平均情報量は情報源の無秩序さを表す指標としても使える．このことから，平均情報量は情報エントロピーとも呼ばれる．

2.2　事後確率とあいまい度

送信側には U 個の送信シンボル $a_1, a_2, \cdots, a_U$ があり，受信側には V 個の受信シンボル $b_1, b_2, \cdots, b_V$ があるものとする．

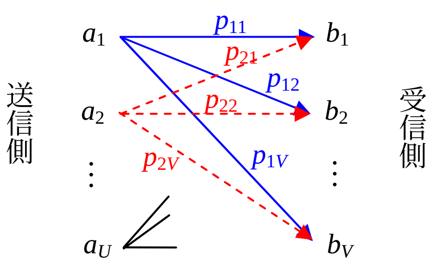
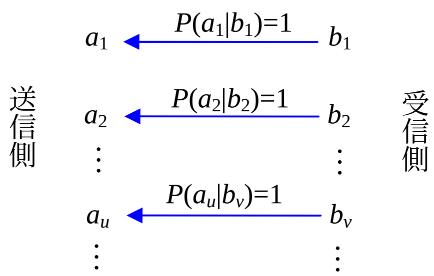


図 2　通信路の確率モデル．

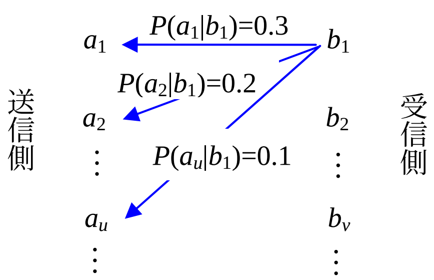
この時，通信路は確率を用いて図 **2** に示すようにモデル化できる．ここで，p_{uv} は u 番目の送信シンボル a_u が通信路に送出された際，受信側で v 番目受信シンボル b_v が受信される確率である．実際の通信システムのほとんどでは $U=V$ が成り立っているが，ここでは一般的な議論をするため，U と V は必ずしも等しい必要はない．

このようなモデルにおいて，条件付確率 $P(a_u \mid b_v)$ を事後確率と呼ぶ．「受信シンボル b_v が受信されたとき，送信シンボル a_u が送信されていた確率」ということができる．その意味を考えるとき，自然に過去形で表現したくなる．通信という事象が完了した後で議論される確率であるため事後確率の名があるのが理解できる．反対に $P(b_v \mid a_u)$ は事前確率と呼ばれる．

事後確率は通信工学において重要な意味を持つ．そのイメージを図 **3** (a), (b)に示す．



(a)　完璧な通信における事後確率



(b)　通信の不確定性と事後確率

図 3 事後確率のイメージ．

雑音がまったくなく，完璧な通信が行われる通信路における事後確率のイメージは，同図(a)

のようである．即ち，ある受信シンボルb_1が受信されたとき，送信されたのは絶対に送信シンボルa_1である．したがって，$P(a_1|b_1)=1$となり，送信シンボルと受信シンボルは同図のように1対1で対応付けられることになる．ここで，図中の矢印が受信側から送信側に向けられているのは，“受信シンボルを見て送信シンボルを推定する”という事後確率の考え方をイメージしている．一方，雑音などによって誤りが生じ，不確定性のある通信路では同図(b)のようになる．即ち，ある受信シンボルの事後確率が特定の送信シンボルに対して1とならず，複数の送信シンボルに確率が分散するのである．但し，

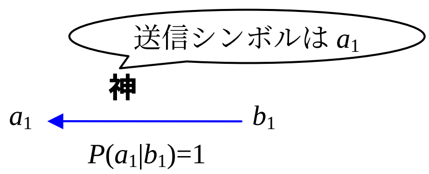
$$\sum_{u=1}^{U} P(a_u|b_1)=1 \tag{5}$$

が成り立っている．事後確率はこのように，通信の不確定性と関わりがある．

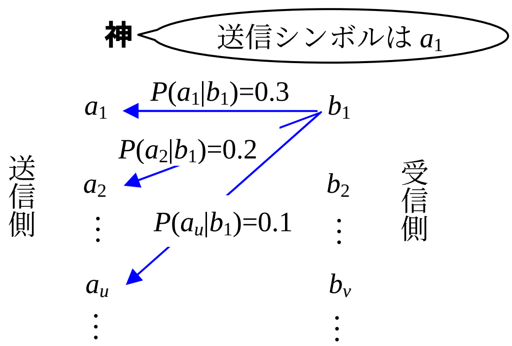
今, 事後確率$P(b_v|a_u)$を元に情報量を考えてみる．即ち，

$$I=\log_2 \frac{1}{P(a_u|b_v)} \tag{6}$$

これは事後情報量と言われ，“受信シンボルb_vを見た後で送信シンボルa_uを知ったときの情報量”と考えられる．



(a)　完璧な通信における事後情報量



(b)　通信の不確定性と事後情報量

図 4 事後情報量のイメージ

そのイメージを図 **4** に示す．今，同図(a)に示す完璧な通信が行われた後，神様から「送られた送信シンボルは実はa_1であった」と教えられたとする．実はこれには何の情報もない．それは，完璧な通信が行える通信路では$P(a_1|b_1)=1$であり，神に教えられなくても受信シンボルがb_1であったのなら絶対に送信シンボルはa_1であるからである．一方，同図(b)に示す，雑音によって乱され不確定性がある通信路で通信が行われた後，再び神様から「送られた送信シンボルは実はa_1であった」と教えられたらどうであろうか．これには一定の情報がある．なぜならば，受信シンボルb_1の事後確率が分散し，複数の送信シンボルに対して0でない値を持つため，完全な自信を持って，送出された送信シンボルを特定できないからである．このような時，神様から送信シンボルはa_1であったという正解を教えられれば，そこには一定の情報を見出すのである．実際，数値的にも，事後確率が1のとき事後情報量は0となり，そうでないとき，0 より大きい値を持つことがわかる．見方を変えると，事後情報量は通信路の不確定性を定量化している，と言える．

しかし，事後情報量はあくまで一つの受信シンボルと一つの送信シンボルとの関係での議論である．現在想定しているU個の送信シンボルとの間の関係で議論するためには，すべての送信シンボルに対して事後情報量の期待値をとる必要がある．これを事後エントロピーと呼び，次式で表す．

$$H(A|b_v)=\sum_{u=1}^{U} P(a_u|b_v)\log_2 \frac{1}{P(a_u|b_v)} \tag{7}$$

事後エントロピーは上式が示すようにある一つの受信シンボルに対して定義されたものであるので，すべての受信シンボルに対して，その生起確率で期待値を次式のように計算する．

$$H(A|B)=\sum_{v=1}^{V} P(b_v)H(A|b_v) \tag{8}$$

これを“あいまい度”と呼ぶ．これは，通信

路の不確定性を，事後情報量を基に全ての送信・受信シンボル間で期待値をとったものと解釈でき，文字通り，通信路の “ あいまいさ ” を定量化したものであると言うことができる.「神様から後で正解を教えられたら得られる情報量」の期待値とも解釈できる.

2.3　相互情報量と通信路容量

通信とは，送信側から受信側へ情報を送ることである．より詳細に見れば，送信側にある情報が通信路を介して受信側に送られることであり，送信側の情報は，受信器が受信シンボルから送信シンボルを推定することによって届く．受信側に届いた情報は，送信側と受信側で共有できた情報の量，ということができ，この意味から “ 相互情報量 ” の言葉がある．送信シンボルの平均情報量は計算でき，それは $H(A)$ である．一方，通信路から出力される受信シンボルについても，各シンボルの生起確率がわかれば平均情報量を計算でき，それは $H(B)$ である．この関係を模式的に表現したのが **図 5** である．

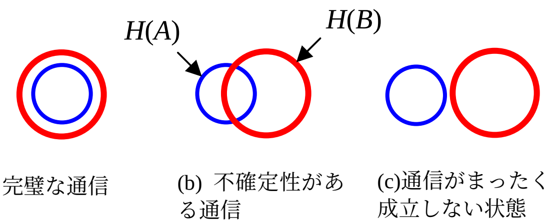


図 5 送信シンボルと受信シンボルの平均情報量の関係.

同図(a)では $H(A)$ と $H(B)$ は完全に重なる．即ち，$H(A)$ の情報は完全に $H(B)$ で表現されている状態であり，雑音の無い完全な通信はその共有部分である相互情報量は最大となる．一方同図(c)では送信シンボルと受信シンボル間に共有部分がまったくない．例えば仏語を日本人が日本語として聞いた場合，送信シンボルと受信シンボルにはまったく関係がないため，情報を共有できないような状況である．送信シンボルと関係なく受信シンボルが生起している状態であり，通信が成立しない．実際にはそのような両極端の中間の同図(b)のような状況となり，二つの円の共有部分が相互情報量，送信側から受信側へ送られ，送受両側で共有する情報である．この相互情報量を $I(A;B)$ と表記する．それでは，$H(A)$ のうち，受信側に伝わらなかった部分は何だろうか．それは通信路の不確定性であるあいまい度 $H(A\,|\,B)$ である．この様子を **図 6** に示す．あいまい度は事後情報量の期待値であり,「神様から後で正解を教えられたら得られる情報量」の期待値であると言える.

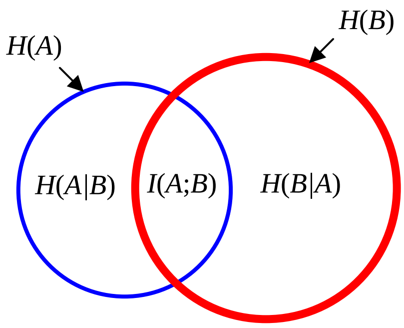


図 6 相互情報量，あいまい度と $H(A)$，$H(B)$ の関係

相互情報量は次のように表現できる.

$$I(A;B) = H(A) - H(A\,|\,B) \tag{9}$$

また，この関係から次の関係も容易に導き出せる.

$$I(A;B) = H(B) - H(B\,|\,A) \tag{10}$$

この式において，$H(B\,|\,A)$ は散布度と呼ばれる．これは送信側から見た受信シンボルの不確定性と解釈でき，次式で与えられる.

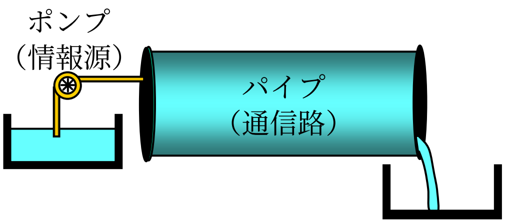
$$H(B|A) = \sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{V} P(a_u)P(b_v|a_u)\log_2 \frac{1}{P(b_v|a_u)} \tag{11}$$

通信路容量は，通信路がどれだけの情報を伝送できるかを定量化する．その指標として $I(A;B)$ を用いるが，一点注意が必要である．それは，$I(A;B)$ はその定義に $H(A)$ を含んでいるため，通信路の性質のみならず送信シンボルによっても値が異なる点である．このため，通

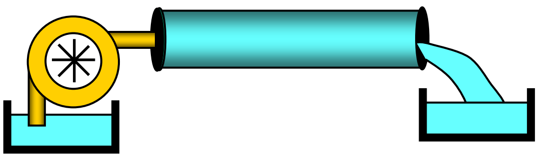
信路容量は次式のように表現される．

$$C = \max_{\sum_u P(a_u)=1} I(A;B) \tag{12}$$

つまり，いかなる送信アルファベットを用いてもよいという条件で，$I(A;B)$の最大値を通信路容量としたのである．このイメージを図 **7** に示す．通信路を水を流すパイプであると考えると，通信路容量は流せる水の量でパイプの能力を測ろうとする考え方であると言える．その際，同図(a)に示すように，いくら太いパイプであっても，水を流し込むポンプが非常に小さいものであった場合，流れた水の量をパイプの能力であるとするのは誤りである．



(a) いくら通信路が太くても，そもそも水を送り出す情報源が小さかったら，通信路の能力測定はうまくいかない．



(b) ポンプ（情報源）は「最大の出力のもの」を使う必要がある．

図 7 通信路容量のイメージ．

流れた水の量を持ってパイプの能力とするためには，同図(b)のように，最大量の水を流せるポンプ，つまり情報源を用意する必要がある．

2.4 連続信号への拡張

これまで，情報源はシンボルを出力するものとして議論を進めてきた．このような情報源を離散的情報源と呼ぶ．一方，次に，情報源が出力するのは時間的に連続的な波形であるものと想定する．このような情報源を連続的情報源と呼ぶ．その出力信号を x とし，それが通信路を介して受信側に伝送される．受信側で観測する信号は送信信号 x に雑音 z が加算されたものであり，これを y とする．このイメージを図 **8** に示す．このような通信路の通信路容量を求めてみる．

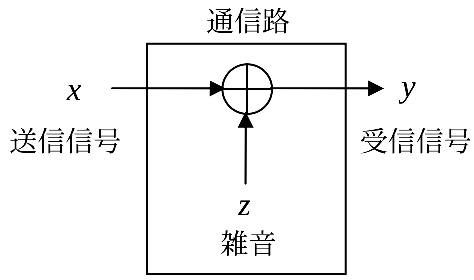


図 8 連続系の通信路モデル．

通信路容量は(9)または(10)と(12)から求められるのであった．しかし今，送信アルファベット A と受信アルファベット B は送信信号 x と受信信号 y に置き換えられている．連続系の平均情報量及びあいまい度はどのように定義されるだろうか．x を出力する連続的情報源の情報エントロピーは次式で与えられる．

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\log_2 \frac{1}{P(x)}dx \tag{13}$$

ここで，$P(x)$は x の確率密度関数である．(3)と比較すると，単に総和が積分に変化しただけであることがわかり，その意味するところは同じである．

同様に，連続的通信路のあいまい度は次式で定義される．

$$\begin{aligned} H(x|y) &= \iint P(y)H(x|y)dxdy \\ &= \iint P(y)P(x|y)\log_2 \frac{1}{P(x|y)}dxdy \end{aligned} \tag{14}$$

これで相互情報量は求められるのだが，通信路容量とは，離散的情報源の場合には，あらゆる送信アルファベットを使えるものとして得られる相互情報量の最大値を通信路容量としていた．連続的情報源の場合，どのような情報源が

最大の相互情報量をもたらすのだろうか.

2.1 節で説明したように,離散的情報源の場合には,出力シンボルの出現確率がすべて等確率である場合に最大であった.次に何が出るかまったく予想できないからである.同じ考え方から,次の定理が成立する[3].

定理 1: 確率密度関数 $P(x)$ の範囲が x 軸上で制限されているとき,平均情報量を最大にする $P(x)$ は,その範囲における一様分布である.

このことは素直に理解できる.しかし一般に雑音のある連続的通信路において,出現する値が必ず一定区間に入ってくる,という想定は現実的ではない.そこで,次の定理に拡張が可能である[3].

定理 2: 確率密度関数 $P(x)$ の分散が σ_x^2 に制限されているとき,平均情報量を最大にする $P(x)$ は,その分散を持つ正規分布である.

ここから,連続的通信路の通信路容量を考えるに当り,送信側にある情報源は,正規分布に従う信号 x を出力する情報源であるものとする.

2.5 連続的通信路の通信路容量の導出

以上から,連続的通信路の通信路容量を考えるに当り,送信側にある情報源は,正規分布に従う波形 x を出力する情報源であるものとする.

分散が σ^2 の正規分布に従う信号 x が持つ情報量について検討する.今,この信号を無限の細かさでサンプル化したときを考える.このとき, $P(x)$ は次式で与えられる.

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (15)$$

その平均情報量は,(15)を(13)に適用すると,

$$\log_2\frac{1}{P(x)}=\log_2\sqrt{2\pi\sigma_x^2}+\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\log_2 e \qquad (16)$$

を用いて,

$$H(x)=\int P(x)\left\{\log_2\sqrt{2\pi\sigma_x^2}+\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\log_2 e\right\}dx \qquad (17)$$

となる.これを, $\int P(x)x^2dx=\sigma_x^2$ となることに注意して計算すると,最終的に次のような結果が得られる.

$$H(x)=\log_2\sqrt{2\pi e\sigma_x^2} \qquad (18)$$

単位は[bit/sample]である.この結果に基づいて,離散的情報源の場合の(10)に沿って,

$$I(x;y)=H(y)-H(y|x) \qquad (19)$$

の計算を行う.

まず, $H(y)$ を求める.入力 x が分散 σ_x^2 の正規分布に従い,雑音 z が分散 σ_y^2 の正規分布に従うものとすると,受信信号 y は,分散 $\sigma_y^2=\sigma_x^2+\sigma_z^2$ を持つ正規分布に従う.したがって, $H(y)$ は(17)の結果を用いれば,

$$H(y)=\log_2\sqrt{2\pi e\left(\sigma_x^2+\sigma_z^2\right)} \qquad (20)$$

と計算できる.一方,散布度 $H(y|x)$ は,雑音の情報エントロピー $H(z)$ に等しい.これは次のように導出できる.まず, x と z が独立であることから,

$$\begin{aligned}P(y\mid x)&=\frac{P(y,x)}{P(x)}=\frac{P(x+z,x)}{P(x)}\\&=\frac{P(x)P(z)}{P(x)}=P(z)\end{aligned} \qquad (21)$$

となる.次に,これを散布度の定義に代入する.

$$\begin{aligned}H(y\mid x)&=\iint P(x)P(y\mid x)\log_2\frac{1}{P(y\mid x)}dxdy\\&=\iint P(x)P(z)\log_2\frac{1}{P(z)}dxdy\\&=\int P(z)\log_2\frac{1}{P(z)}dz=H(z)\end{aligned} \qquad (22)$$

したがって相互情報量は,

$$
\begin{aligned}
I(x;y) &= H(y) - H(y|x) \\
&= \log_2 \sqrt{2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)} - \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_z^2} \\
&= \log_2 \sqrt{\frac{2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)}{2\pi e \sigma_z^2}} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2} = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ここで，P_S 及び P_N はそれぞれ信号電力及び雑音電力であり，その比 P_S/P_N を信号対雑音電力比(SN 比)と呼ぶ．また，求めた相互情報量 $I(x;y)$ の単位は[bit/sample]であり，上述のようにここでは無限に細かいサンプリングを行ったことを想定している. 更に，$I(x;y)$ を求める際，通信路の送信側に接続されている情報源は最大の平均情報量を持つものを選択したため，この相互情報量は通信路容量である．

2.6 帯域制限された連続的通信路の通信路容量

前節では，無限に細かいサンプリング，つまり無限に短いサンプリング周期を想定していた. これは，信号の帯域が周波数軸上で無限の広がりを持つためであるが，このようなサンプリングは実現不可能である．このため，ここでは 0 〜 f_m [Hz]の区間で帯域制限された信号が伝送される連続的通信路について，その通信路容量を導出する．

今, 送信信号 x が 0〜 f_m [Hz]の区間で帯域制限されているとき, サンプリング定理によれば, ナイキスト周波数である 2 f_m [Hz]でサンプリングを行えば，そのサンプルから元の連続波形を完全に再生可能である．このようなサンプリングを行ったとき，1 秒間に得られるサンプル数は 2 f_m 個となる. 1 サンプルが運ぶ情報量[bit]は(23)により与えられているから，この通信路で 1 秒間に伝送できる情報量は,

$$
C = f_m \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) = f_m \log_2\left(1 + \frac{P_S}{N_0 f_m}\right) \tag{24}
$$

で表され, 単位は[bit/sec]となる．ここで，N_0 は単位帯域幅当りの雑音電力である．尚，この表現では帯域を最高周波数 f_m で表現しているが，帯域幅 B_W [Hz]として

$$
C = B_W \log_2\left(1 + \frac{P_S}{N_0 B_W}\right) \tag{25}
$$

と表現する．この結果から，通信路容量は帯域幅と SN 比のみによって決定されることが明らかとなった．

この結果から得られる 2 つの重要な値がある. 一つはまず，(25)において P_S と N_0 を一定にしたまま B_W を増大したとき，C はどのような値となるかを考える．$P_S/N_0 = 1$ と固定した場合の C の変化を**図 9** に示す. ある一定の値に収束することがわかる．

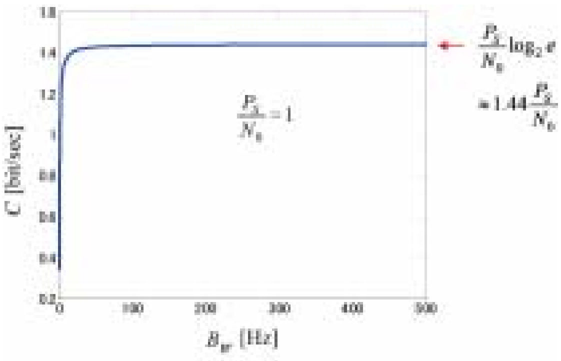


図 9 帯域を無限に増大した場合の通信路容量.

これを数式で表現すると，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{B_W \to \infty} B_W \log_2\left(1 + \frac{P_S}{N_0 B_W}\right) \\
&= \frac{P_S}{N_0}\log_2 e \approx 1.44\frac{P_S}{N_0}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

したがって，帯域幅をいくら増大しても，P_S/N_0 の約 1.44 倍の通信路容量しか得られないのである．現実にはそのようなことは不可能であるが，もし無限の帯域を利用することが許されて, どのような誤り訂正符号を使おうとも, その効果は通信路容量を1.44倍改善させるまで

にとどまるのである．

また，(25)のもう一つの解釈として次のような値がある．今，1 [bit/sec]の通信を考える．この時，無限の帯域を利用できるものとすると $P_S/N_0=1/1.44$ となり，これはデシベル表示で約-1.6 [dB]となる．このことは，無限の帯域を利用していかなる誤り訂正符号を用いても，1[bit/sec]の通信を実現するためには絶対に-1.6 [dB]以上の P_S/N_0 が必要とされる．これをシャノン限界と呼ぶ．

通信路容量を超える伝送速度で情報の伝送を行った場合，ビット誤り率を 0 にできる誤り訂正符号は存在しないことがシャノンの通信路符号化定理として知られている．その原理はこれまでの議論と併せて考えると興味深い[3]．

3　サンプリング定理

連続的通信路の通信路容量を求めるに当り，帯域制限された信号を用い，ナイキスト周波数によるサンプリングを行った時の相互情報量から通信路容量を明らかにした．

ここではサンプリング定理の考え方について明らかにする．サンプリング定理の動機とはそもそも何か．

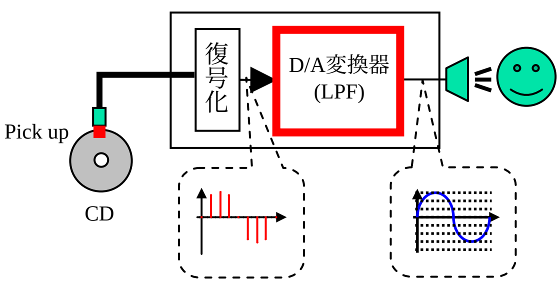


図 10 サンプリング定理への動機付け．

図 10 に，サンプリング定理への動機付けとしてコンパクトディスク(CD)からの音声の再生を模式図として示す．CD には，音声がサンプリング，量子化，符号化の過程を経てバイナリデータとなって記録されている．同図は CD プレーヤーのイメージである．CD から読み取ったバイナリデータを復号すると，記録されている音声のサンプル列を得ることができる．この離散的なサンプル列の間をどのような線で繋いだら，元の音声波形と同じ波形を得ることができるのだろうか．この，サンプル列の間を繋ぐのが低域通過フィルタである．低域通過フィルタとして理想フィルタを考える． **図 11** に理想フィルタの周波数特性を示す[4]．ある一定の通過帯域で均一の振幅を持ち，ある周波数で不連続に振幅が 0 になるのが特徴であり，次式で表される．

$$G(f)=\begin{cases} e^{-j2\pi f t_0}, & |f|\le B_W/2 \\ 0 & |f|> B_W/2 \end{cases} \qquad (27)$$

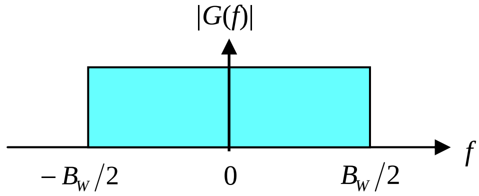


図 11 理想フィルタの周波数特性．

このようなフィルタに，一つのサンプルをインパルスとして入力すると，次のような波形が得られる．

$$g(t)=\int_{-B_W/2}^{B_W/2} G(f)e^{j2\pi f t}df = B_W\frac{\sin[B_W\pi(t-t_0)]}{B_W\pi(t-t_0)} \qquad (28)$$

するとこのように Sinc 関数となり，因果律を満たさないので現実にはこのようなフィルタは存在しない．しかしこのようなフィルタを用いたとき，フィルタ出力に元信号が現れるようなサンプリングを考える．

サンプリングは，ハードウェアの実現としてはスイッチのイメージであるが，数学的には，元信号と周期 T_S のインパルス列の畳込みであると表現できる．このイメージを**図 12** に示す．

標本化関数は，周波数軸上でもそのスペクトルが間隔 $1/T_S$ [Hz]のインパルス列となっている[4]．このような標本化関数を介してサンプルされた信号のスペクトルは，“ 元信号のスペク

トルが標本化関数のスペクトルの位置に繰り返し現れる ” 状態となる．これを図 **13** に示す．

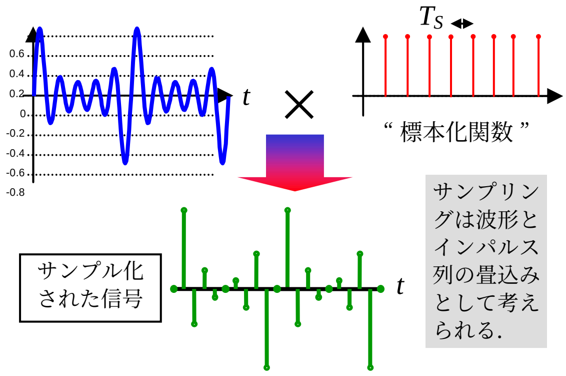


図 12 サンプリングのイメージ．

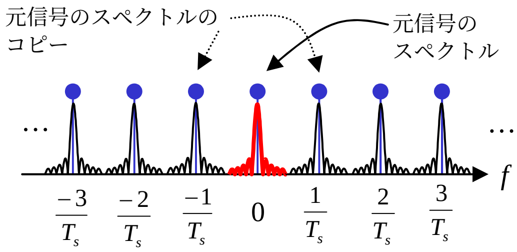


図 13 サンプル化された信号のスペクトル．

元信号には元々，0 [Hz]周辺のスペクトルしかなかったのに，サンプル化された結果，このようにスペクトルが同じ間隔で並んでしまう．このことから，“ サンプル列からの元信号の復元 ” は，時間軸上で見れば “ サンプルとサンプルの間を適切につなぐ ” という処理であるが，周波数軸上で見れば,“ 理想フィルタを用いて元信号のスペクトルだけを残して他のスペクトルを切る ” という処理であることがわかる．

これを行うには，元信号のスペクトルとその両隣のスペクトルのコピーに重なりが生じると，最早いかなるフィルタを用いても両隣のスペクトルを取り除くことができないので,“ 接しているが重なりはない ” ところが限界であることがわかる．

今，図 **13** の横軸で 0 [Hz]周辺のみを拡大した図を図 **14** に示す．元信号は最高周波数 f_m [Hz]で帯域制限されているものとする．サンプリングにより右隣に発生したスペクトルの中心は $f_S = 1/T_S$ [Hz]にあり，またスペクトルは左右対称であることを考えると，元信号のスペクトルとその隣接スペクトルが接しても重ならないのは $f_S \geq 2 f_m$ が成り立つ時であることがわかる．これが周波数軸上でのサンプリング定理の解釈である．

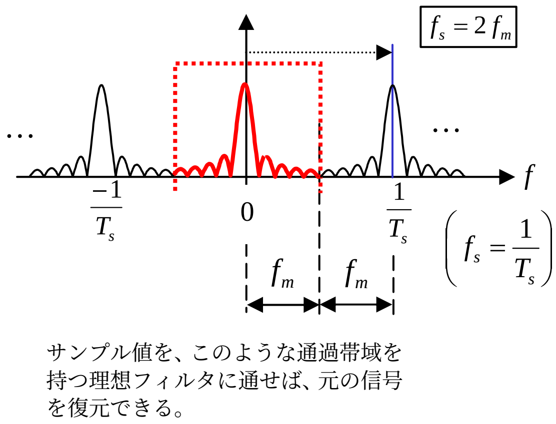


図 14　0Hz 周辺部の拡大．

4　まとめ

本稿では，シャノンの情報理論について，情報量の定義から始まって通信路容量の導出までの流れをシナリオの理解を重点にまとめた．また最後に，サンプリング定理の考え方を周波数軸において説明した．しかし同時に時間軸上での現象があり，これとの対比によって理解すると興味深い[5]．また，オーバーサンプリング，アンダーサンプリング等の技術やサンプリング解像度とダイナミクスの関係等については紙面の都合上本稿で触れていないが，講義において詳述する．

参考文献

[1] C.E. Shannon and W. Weaver, “Mathematical theory of communications,” University of Illinois Press, 1965.

[2] 荒木純道，鈴木康夫，原田博司，“ ソフトウェア無線の基礎と応用，” サイペック（株），2002 年．

[3] 宮川　洋，“ 情報理論，” コロナ社，1979 年．

[4] S.スタイン，J.J.ジョーンズ，“ 現代の通信回線理論，” 森北出版 1995 年．

[5] Bernard Sklar, “Digital Communications: Fundamentals and Applications,” Prentice Hall, 2001.