

IoT / IoE 時代の集積回路設計に必要な電気磁気学

Electromagnetic Theory for LSI Engineers for IoT/IoE Era

益 一哉 (東京工業大学フロンティア研究機構)
Kazuya Masu (Frontier Research Center, Tokyo Institute of Technology)

世の中のあらゆる情報を取り込み、社会に役立てる IoT/IoE の時代になりつつある。IoT/IoE 時代のキーデバイス、物理世界から取り込む情報を無線でやり取りする無数のセンサノードである。そのためシステムやデータ活用が重要視される IoT/IoE 時代においても、新しいデバイスや集積回路を創り出すニーズが衰えることはない。新しい発見や創造を産み出すには、一度は習ったことがある基礎学問に常に立ち戻るといった心構えも必要である。本講義では、これからの時代にイノベーションを生み出す多くの集積回路設計者などハードウェアに近い方々を念頭に「電気磁気学」を取り上げて、基礎的なことや幾つかの役に立ちそうな話題を提供する。

The IoT/IoE era has arrived, where all the information captured from physical world is utilized for society. The key devices of the IoT/IoE era are enormous sensor nodes communicating tremendous information from physical world autonomously with wireless. Inevitably, needs to create new devices supporting high-level system are never decreasing even though system level and data processing researches become important in the IoT/IoE era. We sometimes have to return to the basic or fundamental knowledge that is hidden behind the modern technology. In this lecture, electromagnetic theory is lectured as a basic for integrated-circuit and hardware engineers who wish to create innovation in the future. Fundamental electromagnetic theory from Maxwell's equation and some useful knowledge will be presented.

電磁気の専門家でない筆者がまとめた電磁気学です。是非とも気楽にお聴き下さい。

【1】 電気回路と電磁気学

電気回路論は、電磁界理論をわかりやすく表現するひとつの方法である。そのため、電気回路論を駆使して集積回路設計、特に RF 系に関わる研究に携わる場合は避けて通れない。電気回路論は電磁界理論を表現しただけではなく、二階の微分方程式の解を表現している「等価回路」という考え方は、異分野融合の架け橋にもなっていることも重要である。例えば、機械振動は電気回路で等価回路表現可能である。電気回路論は異分野融合の切り札のひとつである。

【2】 Maxwell の方程式

Maxwell's equations			10
微分形		積分形	
一般的	$\exp(j\omega t)$ の解		
① $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	⑤ $\text{rot } \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ アンペールの法則 ⑨	
② $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	⑥ $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ファラデーの法則 ⑩	
③ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	⑦ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q_i$ ガウスの法則(電界) ⑪	
④ $\text{div } \mathbf{H} = 0$	⑧ $\text{div } \mathbf{H} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ガウスの法則(磁界) ⑫	su

電荷保存則

14

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

電荷の総量はいかなる物理的変化の過程においても、一定不変である。現在までのあらゆる実験事実がこれを支持している。

- Maxwellの方程式からも(簡単に)導かれる。
- 変位電流を含めた (Ampereの法則)。発散をとる。

$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon$

$\text{div rot } \mathbf{H} = 0$

$\text{div} \left(\mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \text{div } \mathbf{E})$

$\Rightarrow \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

電荷保存則

Kazuya Masu

導体内部に電流が流れている状態を扱うのが交流理論であり、このとき導体内部に電界は存在しない。磁界は全領域に均一に存在する。

導体内の電流 (伝導電流 >> 変位電流)

16

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$\left| \frac{\text{変位電流}(i_d)}{\text{伝導電流}(i_c)} \right| = \left| \frac{\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(r,t)}{\partial t}}{\sigma \mathbf{E}(r,t)} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega \mathbf{E}_o(r,t) e^{j\omega t}}{\sigma \mathbf{E}_o(r,t) e^{j\omega t}} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \right|$

周期的変化

$\omega_d \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_o} \Big|_{\text{for Cu}} = \frac{1/(1.7 \times 10^{-6} [\Omega \cdot \text{cm}])}{8.854 \times 10^{-12} [\text{F/m}]} \approx 6 \times 10^{18} \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$

- $f_d \ll 10^{18} [\text{Hz}]$ では、**伝導電流 >> 変位電流**
- 通常の集積回路(電気回路)を取り扱う範囲では、導体中の電流は「伝導電流」のみを取り扱えば良い。
- (考察) 半導体中では？

Kazuya Masu

波動方程式

27

- ①式②式のrotをとって整理すると、波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

このベクトル公式を利用する。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Kazuya Masu

平面波と伝搬特性

28

- 電波の進行方向は z 方向。
 - 電界は E_x 成分のみ
 - 交番電磁界 $E_x = E_{x0}(z)e^{j\omega t}$
- とすると平面波の解が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E_{x0}(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{x0}(z)$$

$$\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2} = \alpha + j\beta$$

伝搬定数
propagation constant

減衰定数
attenuation constant

位相定数
phase constant

Kazuya Masu

平面波と伝搬特性

31

- $\sigma = 0$ (理想的絶縁体、真空中に相当)

■ 減衰定数 $\alpha = 0$ [Nep/m]

■ 位相定数 $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ [rad/m]

■ 位相速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ [m/sec] $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$

■ 固有インピーダンス

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ [}\Omega\text{]} \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Kazuya Masu

平面波と伝搬特性

32

- $\sigma \neq 0$ (損失のある媒体を伝搬するとき)

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \text{ のとき} \Rightarrow f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \approx \frac{1/(2 \times 10^{-8} \Omega\text{m})}{8.8 \times 10^{-32} \text{ F/m}} \approx 10^{18} [\text{Hz}]$$

■ 減衰定数 $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$ [Nep/m]

■ 位相定数 $\beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$ [rad/m]

■ 位相速度 $v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$ [m/sec]

■ 固有インピーダンス $\alpha = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j) \text{ [}\Omega\text{]}$

Kazuya Masu

平面波と伝搬特性

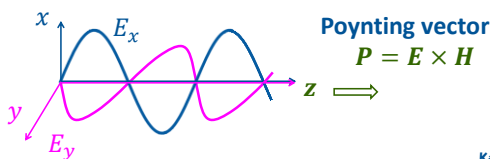
29

- 電界は E_x 成分、磁界は H_y 成分のみとなる。

$$E_{x0}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

$$H_{y0}(z) = \frac{1}{\eta}(Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z})$$

- η : 固有インピーダンス



Kazuya Masu

平面波と伝搬特性

30

- 伝搬定数

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right) \right\}^{1/2} \text{ [Nep/m]}$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right) \right\}^{1/2} \text{ [rad/m]}$$

- 特性インピーダンス (固有インピーダンス)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}}} \text{ [}\Omega\text{]} \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Kazuya Masu

Maxwellの方程式から言えること。

34

- Maxwellの方程式から言えることは、まとめて見ると、

1. 電磁波なる波動が存在することを予見する。
2. 光は、Maxwellの方程式から予見される電磁波である。
(正確にはそのひとつである)
3. 光の速度は一定である。

- ふと立ち戻ってみると、疑問が湧いてくる。

- 誰が、光がMaxwellの方程式から予見される波動だと言ったのだろうか？ 或いはどうやって証明したのだろうか？
- Maxwellの方程式から光速一定が導出できるのか？

- これについては、講演中で詳しく論じる。

Kazuya Masu

光速 c 、真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 の関係は？

49

- MKS単位系ではこれらの数値はどのように定められるのか？

1. Maxwellの方程式から、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である。

2. 光速 c は実験的に求められる。
 $c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s]

3. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] と定める。(Maxwellの方程式から 4π を消すことができる。)

4. $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12}$ [F/m] となる。

- μ_0 と ϵ_0 があって、光速が定まるのではない事に注意。このことを明示的に記述している本が少ない。

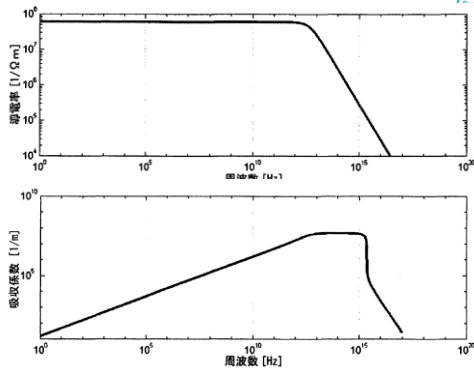
- 今回の資料準備中に、「末松安晴、「電磁気学」共立出版 (1973), p.31」に明示的に記述があることを見つけた。流石、末松先生！

Kazuya Masu

【3】 Maxwell の方程式と LSI に利用される材料

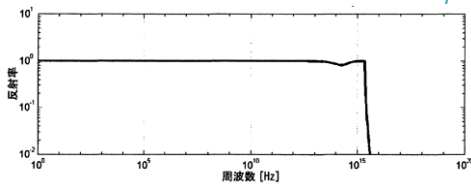
金属物性の周波数特性はどうなっている？

58



金属物性の周波数特性はどうなっている？

59



- 銅の電気特性の周波数依存性(計算値).
- 導電率は緩和周波数(4THz) まで一定であり、緩和周波数において減衰が開始する。
- 反射率は可視光領域までほぼ1である。
- 吸収係数は近赤外線領域まで増加し、赤外で一定となる。紫外線領域において吸収係数は急激に減少する。

Ron Schmitt, Electromagnetics Explained (LSI技術者のための親切的電気磁気学)™

Maxwell の方程式から金属の性質を考える。

60

● 物性論的には、

1. Drude Model

$$\frac{m_0}{2} v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$$

- 電子を粒子として取り扱う。古典的分子運動論を適用。
- それでもいろいろ分かる。

2. Sommerfeld Model

- Fermi速度で電子は運動する。有効質量

$$\frac{m_0}{2} v_F^2 = E_F \quad E_F = 8 \sim 10 \text{ eV}$$

3. バンド理論、Boltzmannの輸送方程式・・・と続く

- 半導体を嚙るには、バンド理論などは多少勉強した方が良い。

4. 古典論、半古典論だけでも、いろいろとわかる。

Kazuya Masu

金属中の電子伝導(古典論)

61

● 電子(粒子)の運動方程式

$$m_e \left[\frac{dv}{dt} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE$$

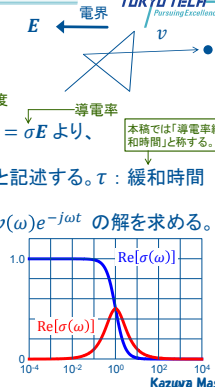
● $\frac{dv}{dt} = 0$ の定常状態。 $J = -en_e v$, $J = \sigma E$ より、

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \quad \text{直流導電率、}\sigma(0)\text{と記述する。}\tau: \text{緩和時間}$$

● $E(t) = E(\omega)e^{-j\omega t}$ として、 $v(t) = v(\omega)e^{-j\omega t}$ の解を求める。

$$J(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - j\omega\tau} E(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2} + j \frac{\omega\tau \cdot \sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2}$$



金属中の電子

62

● $\nabla \times H = i_c + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ の発散をとる。

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \text{div}(\sigma E) + \text{div} \left(\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \\ = 0 \quad (\text{ベクトル公式}) \quad \sigma \text{div} E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} E)$$

● $\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon}$ より、 $\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$ となる。これを解いて

$$\rho = \rho_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_d} \right), \text{ where } \tau_d = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \text{誘電緩和時間}$$

● 仮に、導体内部に電子が存在(密度分布が変化)しても、 τ_d の時間で拡散して、導体表面へ移動する。

と多くの本になどは説明されてわかった気になるが、真面目に考えると難しい。

Kazuya Masu

誘電緩和(解けそうで良くわからない問題)

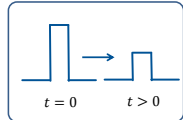
63

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \rightarrow \rho = \rho_0 \exp \left(-\frac{t}{(\epsilon/\sigma)} \right)$$

● $t = 0$ で、 $Q \delta(r)$ のように電荷が存在していたとして、 $\rho(r, t)$ は一般的に解けるのだろうか？

● どうも右図のようになるらしい。

- 後藤以紀、高橋秀俊先生らの教科書
- 岡部洋一先生の本にはもう少し突っ込んだ説明有り。 $t < 0$ での電荷を集める方法を考慮したり、電場は光速で伝わることも考慮している。



● 残念ながら、咀嚼仕切れていないので今後の課題として残す。

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (1)

79

● 半径 a の円筒導体に z 方向のみに i_z が流れる。満たすべき Maxwell の方程式(準定常電流に相当する)

$$\sigma \mu \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} = \nabla^2 E(r, t) \quad \text{拡散方程式と同じ形}$$

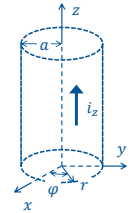
$$\text{rot } E(r, t) = -\frac{\partial E(r, t)}{\partial t}$$

● $i_r(r, t) = i_\phi(r, t) = 0$ であり、

$i_z(r, \phi, z, t)$ は r だけの関数 $i_z(r, t)$ とする。

● Ohm の法則から、 $E_r(r, t) = E_\phi(r, t) = 0$

● $E_z = E_z(r, t)$ のみ存在する。 $i_z(r, t) = \sigma E_z(r, t)$



Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (2)

81

● $E_z(r, t)$ の満たすべき微分方程式

$$\frac{\partial^2 E_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial t}$$

● $E_z(r, t) = E_z(r) e^{j\omega t}$ として、定常解を求める。このとき満たすべき微分方程式は

$$\frac{d^2 E_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z(r)}{dr} + k^2 E_z(r) = 0$$

where $k^2 = -j\sigma\mu\omega$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

これの解は、Bessel関数

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (3) 82

- $E_z(r) = A J_0(kr)$ ここで、 A は任意定数。
- $i_z(r) = \sigma E_z(r)$ である。円筒形全体に流れる電流を I とする。

$$\int_0^a 2\pi r i_z(r) dr = I, \text{ where } i_z(r) = \sigma A J_0(kr)$$

- $A = \frac{k I}{2\pi\sigma a J_1(ka)}$ と定めることができ、と解くことができる。

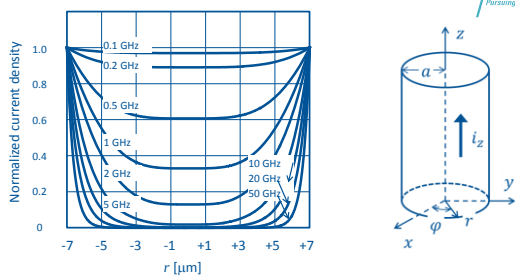
$$E_z(r) = \frac{k I}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

$$i_z(r) = \frac{k I}{2\pi a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

砂川重信「理論電磁気学(第3版)」(紀伊國屋書店)に電流密度まで求める手順が示されている。電気磁気学の教科書には珍しい。

Kazuya Masu

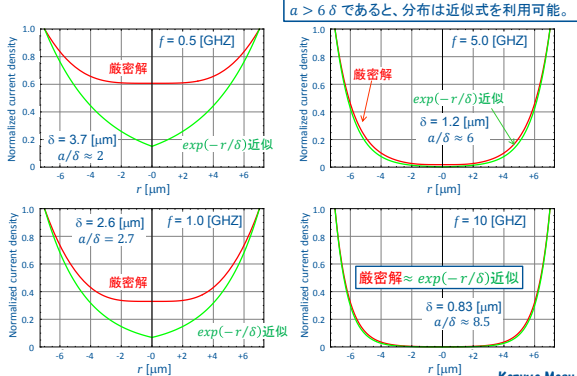
円筒導体に流れる電流(表皮効果) (4) 83



- 金属として、Alを想定(2.7 μΩcm)
- 直径(2a)=7 μm
- 表皮厚さ(δ)
δ = 2.6 μm at 1 GHz
δ = 0.83 μm at 10 GHz

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (5) 84



Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (6) 85

- $E_z(r) = \frac{k I}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$ より、 $r = a$ における電界強度を z 方向に $0 \sim \ell$ で積分して、電圧降下 V を求める。

$$V = \int_0^\ell E_z(r=a) dz = \frac{k I \ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

- 全電流は I であるから、 $Z_{eff} = V/I$ より実効インピーダンスを求めることができる。

$$Z_{eff} = \frac{k \ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

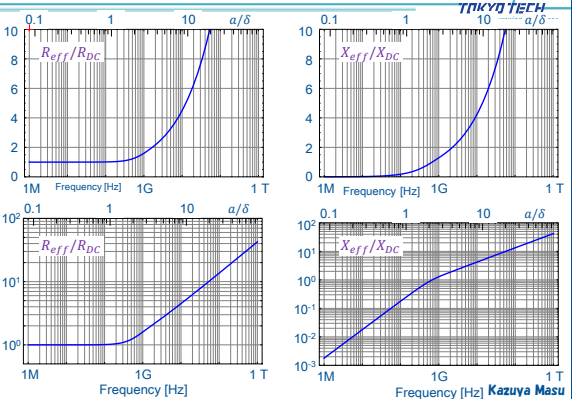
$$\text{or } k = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$$

σ: 導電率

a: 導体の半径

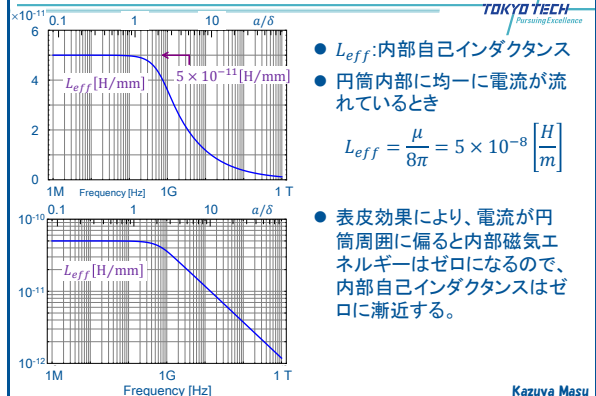
Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (7) 87



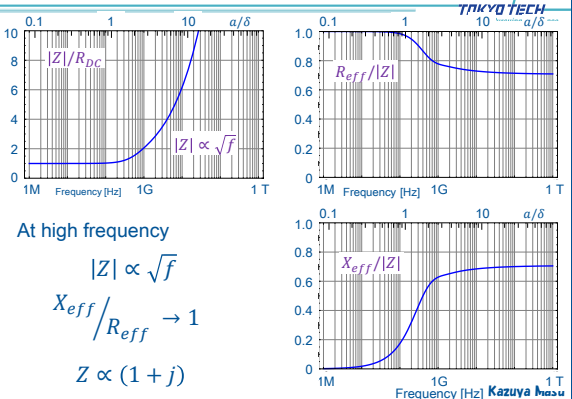
Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (8) 88



Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (9) 89



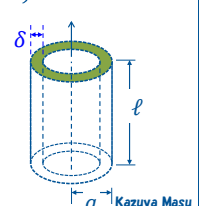
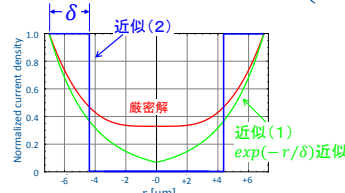
Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果) (10) 抵抗成分(R_{eff})近似式(1) 90

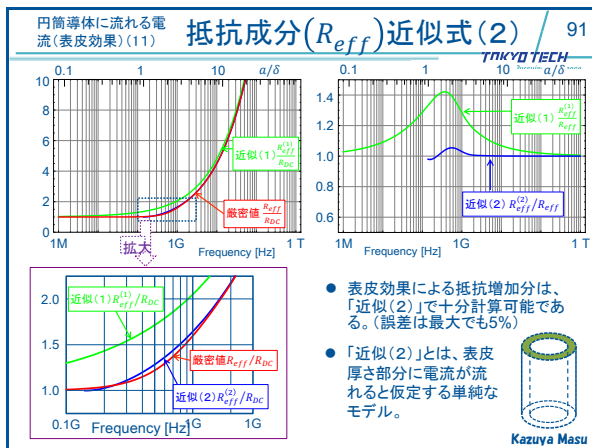
- 抵抗成分近似式を求める。適当な電流分布を仮定。

近似(1) $R_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{2\pi\delta(a - \delta + \delta e^{-\frac{a}{\delta}})}$

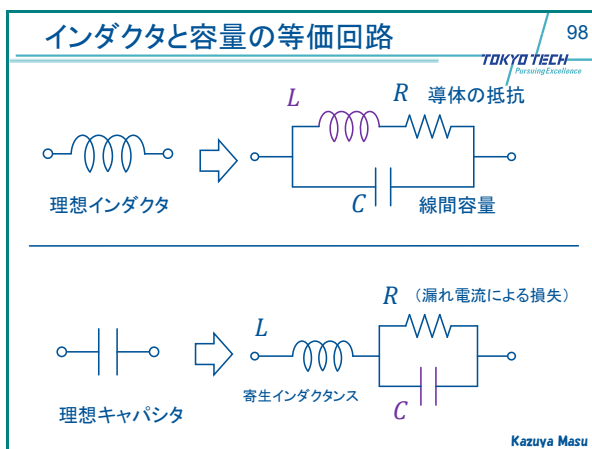
近似(2) $R_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{\pi\delta(2a - \delta)}$



Kazuya Masu



【4】 配線モデリングに役に立つ事柄



インダクタ等価回路

99

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \times \frac{1}{j\omega C}}{(R + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}$$

● $Im[Z] = 0$ になる周波数 ω_r を求める。 $\omega_o \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ とする。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} < \omega_o, \quad \text{where } 1 - \frac{CR^2}{L} > 0$$

(或いは $\frac{L}{C} > R^2$)

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right) \frac{1}{R} \text{ at } \omega = \omega_r$$

導体の抵抗

線間容量

Kazuya Masu

インダクタ等価回路

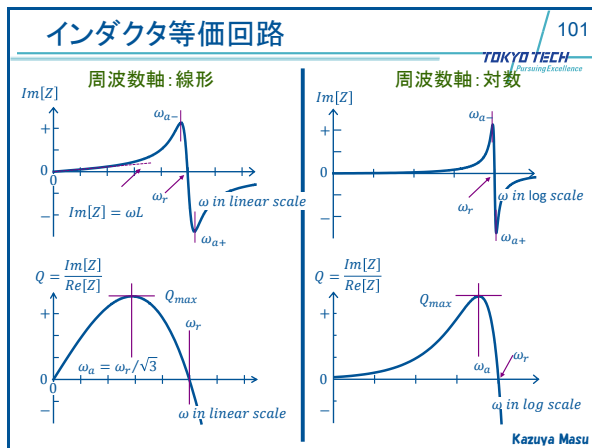
100

● $Q \equiv \frac{Im[Z]}{Re[Z]}$ と定義し、 Q_{max} になる周波数 ω_a を求める。
($\frac{dQ}{d\omega} = 0$ となる周波数を求める。)

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - \frac{CR^2}{L}\right)^{3/2}, \text{ at } \omega = \omega_a$$

Kazuya Masu



インダクタ等価回路

102

● $Re[Z]$ が最大になる周波数: ω_{Rmax}
($\frac{dRe[Z]}{d\omega} = 0$ となる周波数を求める。)

$$\omega_{Rmax} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}} > \omega_r$$

$$Re[Z]_{max} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C}\right) \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

at $\omega = \omega_{Rmax}$

$$Im[Z]_{\omega=\omega_{Rmax}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

Kazuya Masu

容量を求める。

108

● いくつかの線路の線間容量を求めてみます。

● 2導体があったとき、それぞれの導体の電荷を $+Q$, $-Q$ として、導体間の電位差が V であれば、容量 C は

$$C = \frac{Q}{V}$$

電磁気学には直接関係しませんが、「微分容量」って何でしょうか？

Kazuya Masu

簡単な静電場の例

109

● 原点 ($r = 0$) に電荷 (q)

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

$$E(r, \theta, \phi) = -\text{grad}\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

● 半径 a の無限長さ金属に単位長さ当たり ρ の電荷

$$\varphi(r, \theta, z) = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon} \log_e r + C$$

$$E(r, \theta, z) = -\text{grad}\varphi = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{e}_r}{r} \quad (\text{for } r \geq a)$$

Kazuya Masu

平行平板 (平行平板線路を想定して)

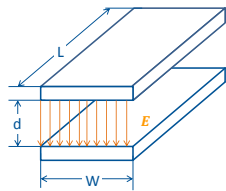
110

- Edgeでの電界の乱れなどが無いと仮定

$$C = \epsilon \frac{WL}{d} \quad [F]$$

- 単位長さ当たりの容量

$$C = \epsilon \frac{W}{d} \quad [F/m]$$



Kazuya Masu

線路のインダクタンスを求めてみる

115

- 電磁気学の復習をしてから、線路のインダクタンスを求める。
- 求め方は、電磁気学の教科書や演習書 (末尾の演習書を参照下さい) に書いてあるが、集積回路の寸法で計算してみることで、インダクタンスの大きさを感覚として理解する。

Kazuya Masu

同軸ケーブルの容量

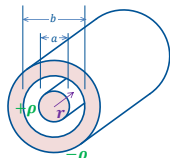
111

- 内導体に $+\rho [C/m]$ 、外導体に $-\rho$ の電荷が存在するとして、導体間の電位差 V を求める。 $C = \rho/V$ より単位長さあたりの容量を求める。

$$E(r, \theta, z) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \frac{e_r}{r}$$

$$V_{ab} = \int_a^b E(r, \theta, z) \cdot dr = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{\rho}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad [F/m]$$



Kazuya Masu

Ampereの周回積分 (例題)

117

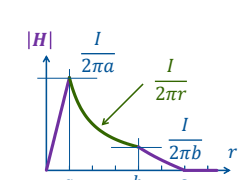
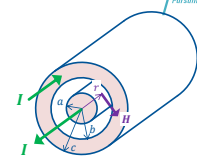
- 内導体と外導体に電流 I が逆方向に流れている。 r における磁界 H
- r の内側の電流 I_r を求めて Ampere の周回積分を利用

$$H = \frac{I}{2\pi a^2} r \quad \text{for } r \leq a$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{for } a \leq r \leq b$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \quad \text{for } b \leq r \leq c$$

$$H = 0 \quad \text{for } c \leq r$$



Kazuya Masu

平行往復導線の容量 (1)

112

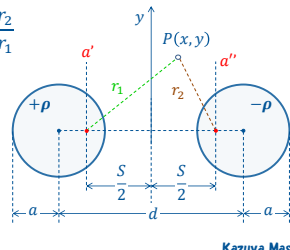
- 半径 a 、間隔 d の平行導線。 d が a に比較して十分大きくないとする。(胸像法を利用して求める方法もある)
- $+\rho$ 、 $-\rho$ の電荷は導体表面に均一に分布せず、相互に引き合う。その結果、電荷分布の平均中心は a' 、 a'' となる。(近接効果)

- P 点の電位 $V_P = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ($r_1 = r_2$ で電位は零とする。)

- $r_2/r_1 = k$ なる等電位面を考える。幾何学的に

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{S}{2} + x\right)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{S}{2} - x\right)^2 + y^2}$$



Kazuya Masu

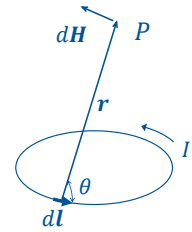
Biot-Savart's law

118

- ひとつの閉回路 C に沿って流れる電流 I によって P 点に生じる磁界強度 H

$$H = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{dl \times r}{r^3}$$

$$dH = \frac{I dl \times r}{4\pi r^3}$$



ところで、Biot-Savart の法則は如何にして導出されるのか？

1. 理論的？
2. 実験的？

Kazuya Masu

平行往復導線の容量 (2)

113

- 整理すると、 $\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1} \frac{S}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{kS}{k^2-1}\right)^2$ (等電位面は円)

- 右導体を見ると、等電位面の半径は $a = \frac{kS}{k^2-1}$ 、円の中心は、 $(x, y) = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \frac{S}{2}, 0\right)$ にある。 S を消去して k を求めると、

$$k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}$$

$$\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right) \rightarrow \frac{d-a}{a}$$

- 両導体間の電位差を求める。

$$V = V_{left} - V_{right} = \frac{\rho}{\pi\epsilon} \ln \frac{S-a'}{a'} = \ln k$$

- 最終的に容量は、 $C = \frac{\rho}{V} = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right)}$

Kazuya Masu

磁気エネルギー

123

- 電流 I の流れるインダクタ L に蓄えられるエネルギー

$$U_m = \frac{L I^2}{2}$$

- 磁気エネルギー密度

$$u_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{H \cdot B}{2}$$

- 電圧 E の流れる容量 C に蓄えられるエネルギー

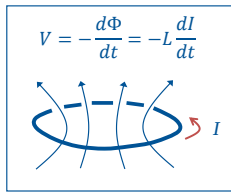
$$U_e = \frac{C V^2}{2}$$

- 電気エネルギー密度

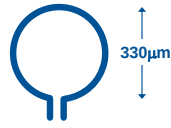
$$u_m = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{E \cdot D}{2}$$

Kazuya Masu

Inductance of wire and circle

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$


Square Shape



Which structure does have large self-inductance ?

Straight Line

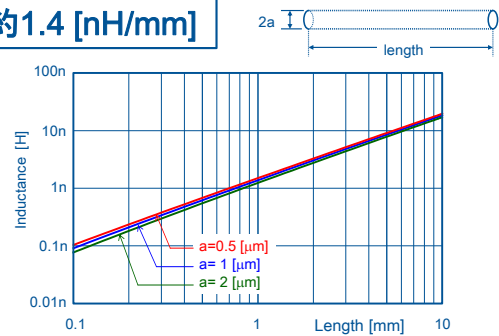


Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス

130

約1.4 [nH/mm]



Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス (1)

125

導体内部に均一に電流が流れている(低周波)場合

1. 導体内部 ($x < a$) の磁界強度

$$H = \frac{rI}{2\pi a^2}$$

2. 導体内部の磁界エネルギー U

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \mu H^2 2\pi r \ell dr = \frac{\mu \ell I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu \ell I^2}{16\pi}$$

3. 導体内部の自己インダクタンス L_i は $U = L_i^2 I^2 / 2$ より、

$$L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1) \quad L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1)$$

内部インダクタンスは導体径に依存しない。長さのみで決定される

Kazuya Masu

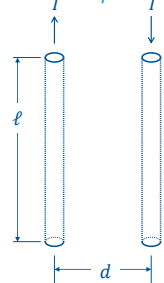
平行往復導体の自己インダクタンス

131

1. 往復線路1本当たりの自己インダクタンス

$$L = \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

$$L \approx \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right), d \gg a$$



導体半径 a
導体長さ: ℓ
導体間隔: d

Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス (2)

126

4. 導体外部 ($x > a$) のP点における磁界強度

$$H = \frac{I}{4\pi x} \left(\frac{\ell - y}{\sqrt{x^2 - (\ell - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

5. 導線の鎖交磁束 ϕ

$$\phi = \int_0^\ell \int_0^\infty \mu_o H dx dy = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^\ell \left(\frac{\sqrt{x^2 - \ell^2}}{x} - 1 \right) dx = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right)$$

6. 導体外部の自己インダクタンス L_{out} は $U = L_{out} \phi$ より、

$$L_{out} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \quad \dots (2)$$

Kazuya Masu

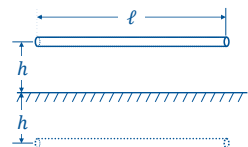
導線の自己インダクタンス(接地面有り)

135

- 接地面から、 h の距離にある導体の自己インダクタンス
- 接地面を完全導体とみなすと、鏡像の位置にリターン電流が流れると考えれば良い。

$$L = \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

$$L \approx \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h}{a} + \frac{1}{4} \right), h \gg a$$



導体半径 a
導体長さ: ℓ
接地面からの距離: h

Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス (3)

127

7. 求める自己インダクタンス $L = L_i + L_{out}$

$$L = \frac{\mu \ell}{8\pi} + \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \quad \dots (3)$$

8. 導線が十分に長い ($\ell \gg a$) とする。また、導体内部の比透磁率が真空の透磁率と等しい ($\mu = \mu_o$) として、

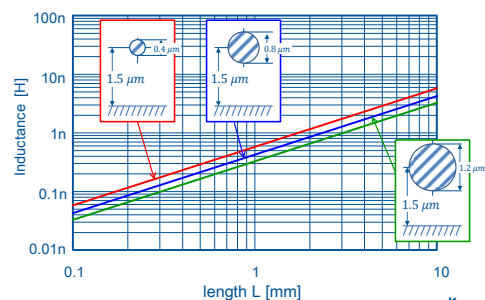
$$L \approx \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \left(\log \frac{2\ell}{a} - \frac{3}{4} \right) \quad \dots (4)$$

Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス(接地面有)

136

0.3~0.6[nH/mm]



Kazuya Masu

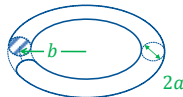
円断面円形導線の自己インダクタンス

138

- 断面半径 a の導体で、平均半径 b の円形コイルを構成した。 $(b \gg a)$

$$L = \frac{\mu_0 b}{2} \left(\log_e \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

$$L = \frac{\mu_0 R}{4\pi} \left(\log_e \frac{4R}{a\pi} - \frac{7}{4} \right)$$



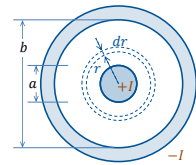
導体断面半径 a
平均半径: b
線長: $R = 2\pi b$

Kazuya Masu

同軸線路のインダクタンス

142

- $a < r < b$ における磁界 $H = \frac{I}{2\pi r}$
- 磁束は、 $d\phi = \mu H dr = \frac{\mu I}{2\pi r} dr$
- 全磁束は、 $\Phi = \int_a^b d\phi = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
- 自己インダクタンス
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



- 低周波のときの内部導体の内部インダクタンスをくわえて

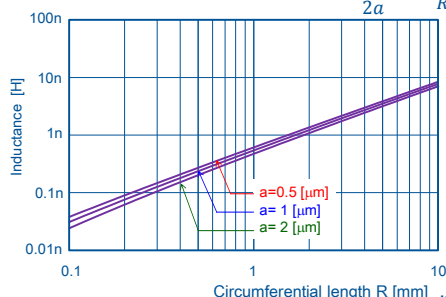
$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

Kazuya Masu

1-turn coilの自己インダクタンス

139

約0.5[nH] for $R=1[\text{mm}]$



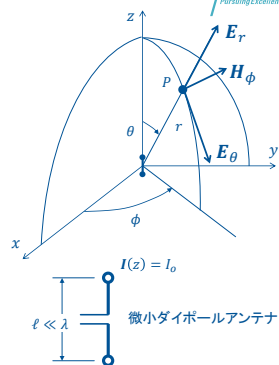
Kazuya Masu

【5】 RF 回路設計に関わる事柄

微小ダイポールからの放射

152

- 微小ダイポール
 - 波長より十分長さが短い $\ell \ll \lambda$
 - 角周波数 ω の電流 $\vec{I} = I_0 \hat{x}$ が一様に流れる
- P点における電界 $\vec{E} = [E_r, E_\theta, E_\phi]$ 、磁界 $\vec{H} = [H_r, H_\theta, H_\phi]$ は次のように求められる。



Kazuya Masu

直線導体、リングのインダクタンス

140

- 直線導体やリングのインダクタンスは、電磁気学の演習書にもよく掲載されている問題です。
- 表皮効果が顕在化して、電流が導体表面だけを流れるようになると、内部自己インダクタンス (0.05nH/mm) 分だけ、自己インダクタンスは減少します。

Kazuya Masu

微小ダイポールからの放射

153

$$E_r = j \frac{120\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \cos \theta$$

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \sin \theta$$

$$H_\phi = j \frac{\ell I_0}{2\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right\} \sin \theta$$

$$E_\phi = 0 \quad H_r = H_\theta = 0$$

静電界 (terms with 1/r^3)
放射界 (terms with 1/r)
誘導電磁界 (terms with 1/r^2)
遠方の届くのは、放射界

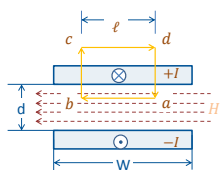
Kazuya Masu

平行平板線路のインダクタンス

141

- $+I, -I$ の流れている平行平板線路を考える。
- Ampereの周回積分 $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ を $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ に適用する。
- $H\ell = \frac{\ell}{W} I$ であるので、 $\Phi = \int_0^d \mu H dx = \mu \frac{d}{W} I$
- $\Phi = LI$ より、

$$L = \mu \frac{d}{W}$$



Kazuya Masu

微小ダイポールからの放射 (放射界)

154

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \quad H_\phi = j \frac{\ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta$$

- 位相項は e^{-jkr} であり、 E_θ 及び H_ϕ は、 r 方向へ $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で伝搬する進行波
- 電界 E_θ 及び磁界 H_ϕ は直交し、進行方向 (r 方向) とも直交する。
- $E_\theta / H_\phi = 120\pi = \eta_0$ (真空の固有インピーダンス) である。

r 方向へ伝搬する平面波

Kazuya Masu

放射電力と放射抵抗

155

- ポインティングベクトル $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
- ポインティング電力 $P = E_{\theta} H_{\phi} = \frac{E_{\theta}^2}{\eta_0}$

$$P(r, \theta, \phi) = 30\pi \left(\frac{\ell I_0}{\lambda r} \right)^2 \sin^2 \theta \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

- これを全空間で積分して全放射電力を求める。

$$W_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 60\pi \left(\frac{\ell I_0}{\lambda r} \right)^2 r^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 I_0^2 [W]$$

Kazuya Masu

放射電力と放射抵抗

156

- 電流 I_0 が流れたときの有効電力が放射電力 W_r である。すなわち、微小ダイポールに $R_c = W_r / I_0^2$ の抵抗が存在することに相当
- R_c : 放射抵抗 (radiation resistance)

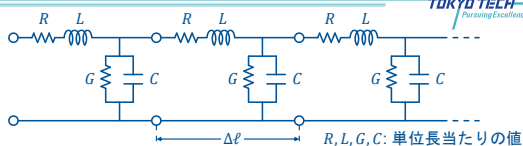
$$R_c = \frac{W_r}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

- 半波長アンテナでは 73.13Ω 、 $\lambda/4$ アンテナでは 36.57Ω となる。
- 当日の講演では、多少詳細に述べる。折折角なので逆Lアンテナなども紹介する。

Kazuya Masu

線路方程式

171



線路方程式

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} &= L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + RI(z, t) \\ -\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} &= C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + GV(z, t) \end{aligned}$$

$V(z, t) = V(z)e^{j\omega t}$ とおく。定常状態の線路方程式

Kazuya Masu

波動方程式： 線路と電磁波

172

波動方程式 (線路)

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 I(z)$$

伝搬定数

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$$

特性インピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

波動方程式 (電磁波)

$$\frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{x0}(z)$$

$$\frac{\partial^2 H_{y0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 H_{y0}(z)$$

伝搬定数

$$\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2}$$

特性インピーダンス

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon + \sigma}} [\Omega]$$

Kazuya Masu

平行平板線路の特性インピーダンス

184

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

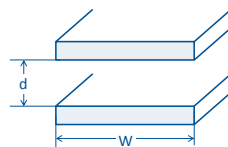
$$C = \epsilon \frac{W}{d} [F/m] \quad L = \mu \frac{d}{W} [F/m]$$

- 特性インピーダンス $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} [\Omega]$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{D}{W} [\Omega]$$

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m], \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cong \frac{1}{36} \pi \times 10^{-9} [F/m] \end{aligned}$$

$$Z = 120\pi \frac{D}{W} [\Omega]$$



Kazuya Masu

同軸ケーブルの特性インピーダンス

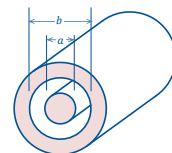
185

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} [F/m]$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) \approx \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} = 60 \ln \frac{b}{a} [\Omega]$$



Kazuya Masu

平行2線 (レツヘル線) の特性インピーダンス

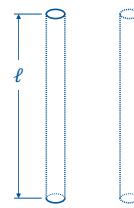
186

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a} \right)^2 - 1} \right)} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{d-a}{a} \right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \approx \frac{\mu}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a}$$

$$Z = 120 \log_e \frac{d-a}{a}$$



導体半径 a
導体長さ: ℓ
導体間隔: d

Kazuya Masu

Characteristic Impedance

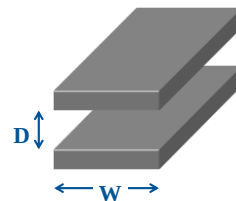
188

In TR line, the impedance is given by

$$Z = 120\pi \frac{D}{W} [\Omega]$$

$D \rightarrow \infty$: Large Z_0

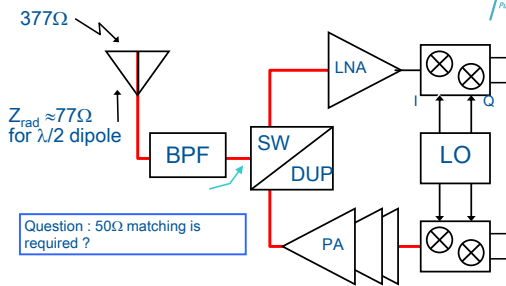
How is the maximum Z_0 ?



Kazuya Masu

Impedance matching in RF circuit

193



- Transceiver with discrete components requires impedance matching between components.
- In one chip CMOS RF, impedance matching is not necessary.

Kazuya Masu

Why 50 Ω ?

197

- Maximum power deliverable to a load

$$P_{\max} \text{ at } b/a = e^{1/2} \approx 1.65$$

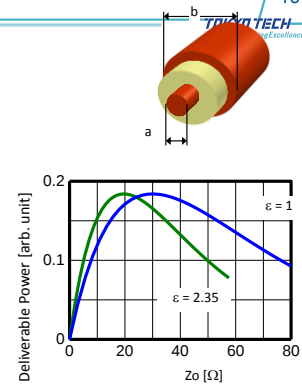
$$Z_0 \approx 30 \Omega \text{ for } \epsilon_r = 1$$

$$Z_0 \approx 20 \Omega \text{ for } \epsilon_r = 2.3$$

$$P \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60} E_{\max}^2 \left\{ a^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Assumption: $b = \text{const.}$

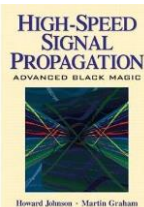
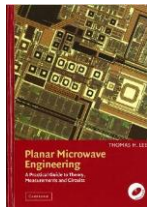


K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

Why 50 Ω ?

194

- This topic returns every several years.
- Discussions are well summarized in the books.



Japanese version

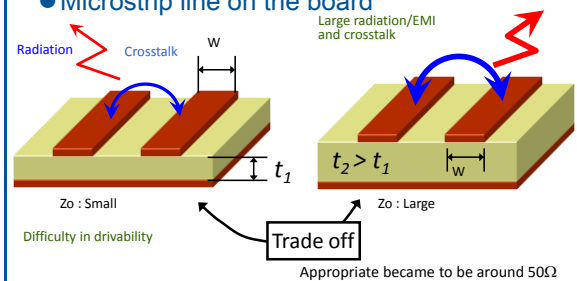
Planar Microwave Engineering: A Practical Guide to High Speed Signal Propagation: Advanced Black Theory, Measurement, and Circuits, by T. H. Lee, Magic, by H. W. Johnson and M. Graham, 2004

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

Why 50 Ω ?

198

- Microstrip line on the board



Assumption: the same metal width

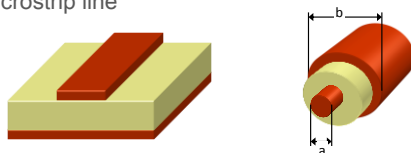
K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

Why 50 Ω ?

195

- In the respect of signal lines

- Coaxial cable
- Microstrip line



- In the respect of impedance matching to antenna

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

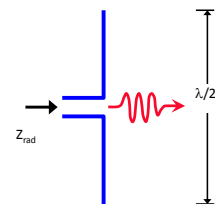
Why 50 Ω ?

199

- Impedance matching to antenna

- $Z_{\text{rad}} \approx 77 \Omega$ for $\lambda/2$ dipole antenna
- $Z_{\text{rad}} \approx 33 \Omega$ for $\lambda/4$ antenna

Easy matching to antenna might be a reason why 50Ω.



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

Why 50 Ω ?

196

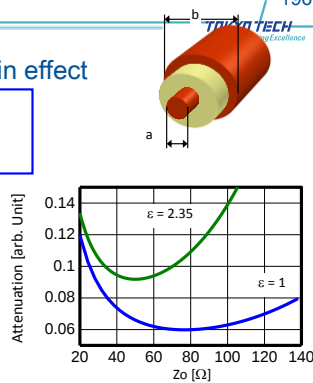
- Loss due to the skin effect

Loss minimum at $b/a \approx 3.59$
 $Z_0 \approx 77 \Omega$ for $\epsilon_r = 1$
 $Z_0 \approx 50 \Omega$ for $\epsilon_r = 2.3$

$$\alpha \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60a} \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Assumption: $b = \text{const.}$



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008

【6】まとめ

電磁気学は、研究開発の現場においてもその基礎となっているのだけれども、多くの方は基礎科目という位置づけで学んでいるので、その本質の理解ができていない、或いは自分の学んだ電磁気学の知識と現場との乖離があるかもしれない。偉そうなことを書いているが、筆者自身のことである。

筆者は電子物性や集積回路が専門であり、電磁気学の専門家ではない。自分なりに理解して纏めてみた。何かのお役に立てば幸いである。ただ、誤った解釈があるかもしれない。質問やコメントをいただければ幸いです。

(益 一哉 masu.k.aa@m.titech.ac.jp)