

Sパラメータで理解するマイクロ波回路 Understanding Microwave Circuits with S-Parameters

太田 勲
兵庫県立大学
Isao OHTA

Headquarters, University of Hyogo

8-2-1 Gakuennishi-machi, Nishi-ku, Kobe, Hyogo, 651-2197 Japan

ohta@hq.u-hyogo.ac.jp

ABSTRACT It is essential for microwave engineers to fully understand the concept and properties of S-parameters. The present article summarizes the fundamentals of S-parameters focusing on how they are used in microwave circuit designs and measurements. First, traveling waves on a transmission line and the S matrix of an N-port circuit are defined, and then some basic properties of the S-parameters are described intelligibly. Moreover, the S-parameters of N-port components of various symmetrical structures are discussed based on various symmetry operations.

1. まえがき

マイクロ波回路では電圧、電流やインピーダンスを直接的な方法で測定することが困難な場合が多い。そのため、各端子対における電圧と電流に基づくインピーダンス行列（あるいはアドミタンス行列）表示の代わりに、線路を伝搬する波（進行波；Traveling wave）という概念を導入して、各入出力線路（ポート、開口）から回路内へ入る入射波と回路外へ出ていく散乱波（反射波と透過波）との間に成立する複素振幅の線形関係で定義される散乱行列（S行列；Scattering matrix）表示を一般に用いる。実際に、入射波に対する散乱波の振幅と位相は直接比較測定できる量であり、この意味において散乱行列は実験とも結びついたより直感的な解析手段であると言える。

Sパラメータ（S行列要素）の値は、マイクロ波回路の構造によって決まるが、回路が無損失、可逆、対称などの性質を有する場合にはそれに応じてSパラメータ相互間に一定の制約条件が成立する。このように回路の一般的な性質によって決まる基本特性を理解しておくことは、様々な回路の測定結果や電磁界解析結果の妥当性を確認するための有用な知識となり、また、新しい回路の開発や見通しの良い効率的な回路設計のための予備的知見として極めて重要である。

本講座では、まず散乱行列の定義と散乱パラメータの物理的意味等を述べた後で、回路の様々な物理的条件に対応する基本特性について概説する。次に、回路設計に活用することを念頭において、種々の対称性を有する回路の解析手法とそこから導かれる回路特性について記述するとともに、その知見を活かした回路設計例について解説する。

2. Sパラメータとその基本特性⁽¹⁾

2.1 導波路上の進行波

一般に、伝送線路上には接続された負荷などによる不連続の影響で、負荷側、電源側の両方向に伝搬する電圧波、電流波が存在する。今、伝送線路は無損失とし、その位相定数を β 、特性インピーダンスを Z_0 、伝搬波の角周波数を ω として、 z の正方向（負荷側）への電圧波を $V_i e^{-j\beta z}$ 、負の方向（電源側）へのそれを $V_r e^{j\beta z}$ とおけば、参照面 z における電圧と z の正方向へ流れ込む電流は、次のように書くことができる。

$$V(z) = V_i e^{-j\beta z} + V_r e^{j\beta z} \quad (1a)$$

$$I(z) = (1/Z_0)(V_i e^{-j\beta z} - V_r e^{j\beta z}) \quad (1b)$$

なお、各振幅は実効値を表すものとする（以下同様）。

いま、 V と I の一次変換で与えられる次の量

$$a(z) = \{V(z) + Z_0 I(z)\} / (2\sqrt{Z_0}) \quad (2a)$$

$$b(z) = \{V(z) - Z_0 I(z)\} / (2\sqrt{Z_0}) \quad (2b)$$

を考えると、線路の特性インピーダンス Z_0 が既知であれば、 V, I より a, b が決まり、逆に、 a, b から

$$V(z) = \sqrt{Z_0} \{a(z) + b(z)\} \quad (3a)$$

$$I(z) = (1/\sqrt{Z_0}) \{a(z) - b(z)\} \quad (3b)$$

のように、 V, I を求めることができる。式(2)、(3)から、線路上の電圧、電流に基づいて回路の電気特性を考察する代わりに、 a, b を用いてもよいことが分かる。

次に、式(1)を式(2)へ代入すれば、

$$a(z) = \frac{V_i}{\sqrt{Z_0}} e^{-j\beta z}, \quad b(z) = \frac{V_r}{\sqrt{Z_0}} e^{j\beta z} \quad (4a,b)$$

となる。これより $a(z)$ は位相速度 ω/β で z の正方向へ、 $b(z)$ は同じ位相速度で z の負方向へ伝搬する電圧に付随する進行波を表していると考えられる。さらに、 z の正方向に供給される電力 P は式(3)より次式となる。

$$P = \text{Re}\{V(z)I^*(z)\} = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \quad (5)$$

上式は、 $a(z)$ は $|a(z)|^2$ なる電力を z の正方向に、 $b(z)$ は $|b(z)|^2$ なる電力を z の負方向に送り、正味として z の正方向に $|a(z)|^2 - |b(z)|^2$ なる電力が供給されるということを表している。この意味で、 $a(z)$ と $b(z)$ はそれらの絶対値の2乗で与えられる電力を、それぞれの進行方向に送っている波と考えることができる。

導波管は、同軸線路やストリップ線路などの TEM 波伝送線路のように一義的に電圧、電流を定義することができないが、等価的な電圧波、電流波で記述される等価伝送線路を定義することにより上記と同じ扱いが可能となる。すなわち、断面形状が一様な導波管では、モード関数で決まる電磁界分布がその分布模様を変えないで管軸方向へ波動として伝搬し、伝送電力は断面内の電界と磁界から決まるので、断面内の電界と磁界の振幅をそれぞれ等価電圧、電流に対応させることにより等価伝送線路を仮定できるのである。

なお、無損失導波管を複数個のモードが伝搬する場合には、各モードが独立に電力を伝送する（モードの直交性）ので、物理的なポートの数が一つであっても、電気的なポート数はモードの数だけあることに注意しなければならない。

2.2 S行列の定義と物理的意味

ここでは、前節で述べた進行波 a, b を用いて、マイクロ波回路の特性を規定する。図1に示すように、 N ポート回路の各ポートの適当な位置に $t_1 \sim t_N$ の参照面を設定する。この参照面において、 N ポート接合回路の方向へ進む波（入射波）を $a_1 \sim a_N$ 、回路から遠ざかる波（散乱波）を $b_1 \sim b_N$ とする。いま、この回路のあるポートに進行波が入射すれば、各ポートから出てくる散乱波の振幅は一義的に決まる。この回路特性を記述する電磁界方程式は線形であるので、全てのポートに入射波がある場合、重畳の定理から各ポートの散乱波はそれらの重ね合わせとなり次式が成立する。

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (6)$$

ここに

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \quad (7a,b,c)$$

である。このように入射波を独立変数に選び、入射波ベクトルを散乱波ベクトルに変換する行列 \mathbf{S} を散乱行列という。

いま、 a_j 以外の入射波を全て0とすれば、式(6)から

$$S_{ij} = b_i/a_j \Big|_{a_k=0 \text{ for } k \neq j} \quad (8)$$

となる。すなわち、 S_{ij} は j 番目ポートに単位振幅の入射波がある場合、 i 番目ポートから出ていく波の複素振幅に等しい。換言すれば、 $i \neq j$ の時には j 番目ポートから i 番目ポ

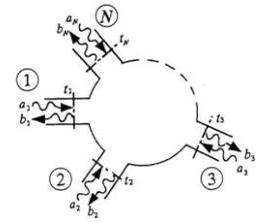


図1 N ポート回路の入射波と散乱波

ートへの透過係数を、 $i = j$ の時には $i(j)$ 番目ポートの電圧反射係数を表す。なお、上記の議論は、 j 番目ポート以外のポートは全て整合終端していることを前提としている。また、式(4)から分かるように、 i 番目線路の特性インピーダンスが j 番目ポートのそれに等しい場合には電圧透過係数となる。

2.3 Zパラメータ/Yパラメータとの変換式

参照面 $t_1 \sim t_N$ における電圧を $V_1 \sim V_N$ 、接合側へ流れ込む電流を $I_1 \sim I_N$ とすれば、式(3)から次の行列関係式を得る。

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{Y}_0} (\mathbf{V} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}) \quad (9a)$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{Y}_0} (\mathbf{V} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}) \quad (9b)$$

ここに、 $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_N]^t$ 、 $\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_N]^t$ で、肩付き添え字 t は転置を表す。さらに、ポート m の特性インピーダンスを $Z_{0m} (= 1/Y_{0m})$ とし、次式を用いた。

$$\mathbf{Z}_0 = \text{diag}[Z_{01}, Z_{02}, \dots, Z_{0N}] \quad (10a)$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}_0} = \text{diag}[\sqrt{Y_{01}}, \sqrt{Y_{02}}, \dots, \sqrt{Y_{0N}}] \quad (10b)$$

N ポート回路のインピーダンス行列を \mathbf{Z} として、 $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ を式(9a, b)へ代入して整理すれば、

$$\mathbf{b} = \sqrt{\mathbf{Y}_0} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0) (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0)^{-1} \sqrt{\mathbf{Y}_0}^{-1} \mathbf{a} \quad (11)$$

となり、 $\sqrt{\mathbf{Y}_0}^{-1} = \sqrt{\mathbf{Z}_0}$ の関係を用いれば次式を得る。

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{Y}_0} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0) (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0)^{-1} \sqrt{\mathbf{Z}_0} \quad (12a)$$

同様に、アドミタンス行列 \mathbf{Y} との関係は次式となる。

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{Z}_0} (\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}) (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y})^{-1} \sqrt{\mathbf{Y}_0} \quad (12b)$$

ここに、 \mathbf{Y}_0 は式(10a)と同形の対角行列である。

同様に、式(3)に対応する行列表示式に式(6)を代入すれば、次式を得る。

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\mathbf{Z}_0} (\mathbf{U} + \mathbf{S}) (\mathbf{U} - \mathbf{S})^{-1} \sqrt{\mathbf{Z}_0} \quad (13a)$$

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\mathbf{Y}_0} (\mathbf{U} - \mathbf{S}) (\mathbf{U} + \mathbf{S})^{-1} \sqrt{\mathbf{Y}_0} \quad (13b)$$

ここに、 \mathbf{U} は単位行列である。

いま、規格化インピーダンス/アドミタンス行列

$$\bar{\mathbf{Z}} = \sqrt{\mathbf{Y}_0} \mathbf{Z} \sqrt{\mathbf{Y}_0}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \sqrt{\mathbf{Z}_0} \mathbf{Y} \sqrt{\mathbf{Z}_0} \quad (14a,b)$$

を用いれば、式(12), (13)は次のように、有理行列関数

の形式に書き直すことができる。

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{U})(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{U})^{-1} = (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{U} + \bar{\mathbf{Y}})^{-1} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Y}}^{-1} = (\mathbf{U} + \mathbf{S})(\mathbf{U} - \mathbf{S})^{-1} \quad (16)$$

式(14)は、新たに $\bar{\mathbf{V}} = \sqrt{\mathbf{Y}_0} \mathbf{V}$ 、 $\mathbf{I} = \sqrt{\mathbf{Z}_0} \mathbf{I}$ と定義した電圧と電流に対するインピーダンス (アドミタンス) 行列となる。

2.4 Sパラメータの基本特性

2.4.1 参照面の移動に伴うSパラメータの変換

いま、図1に示す各ポートの参照面 $t_1 \sim t_N$ を外側へそれぞれ $l_1 \sim l_N$ だけ移動した場合を考える。新参照面における入射波は、元の参照面へ到達するのにその移動分だけ余分の距離を伝搬することになり、一方散乱波も元の参照面から新参照面まで余分の距離を伝搬することになる。したがって、 i 番目ポートの位相定数を β_i 、 j 番目ポートのそれを β_j とすれば、元のパラメータ S_{ij} に対して新参照面での S'_{ij} は次式となる。

$$S'_{ij} = S_{ij} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)} \quad (17)$$

2.4.2 相反回路のSパラメータ

相反回路 (可逆回路) のインピーダンス行列/アドミタンス行列は対称行列となる。したがって、 $\bar{\mathbf{Z}}$ 、 $\bar{\mathbf{Y}}$ も対称となるので、式(15)から

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^t \quad (18)$$

となり、 \mathbf{S} 行列も対称となる。

電圧波 (電流波) を用いて \mathbf{S} 行列を計算することができるが、その場合の (電圧) 散乱行列を \mathbf{S}_V とすると

$$\mathbf{S}_V \mathbf{Z}_0 = (\mathbf{S}_V \mathbf{Z}_0)^t \quad (19)$$

となり、各ポートの特性インピーダンスが異なる場合には \mathbf{S}_V は対称行列とはならず、 $\mathbf{S}_V \mathbf{Z}_0$ が対称となる。

2.4.3 受動回路のエネルギー条件に基づく特性

図1に示す N ポート回路の参照面 t_m における (等価) 電圧と (等価) 電流を V_m, I_m とおけば、ポインティング定理から次式を得る。

$$\sum_{m=1}^N V_m I_m^* = p_{\text{loss}} + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (20)$$

ここに、 p_{loss} は回路内における平均消費電力を、 W_m と W_e はそれぞれ回路内部に蓄えられる平均の磁気および電気エネルギーを表している。式(3)を考慮すれば、

$$\sum_{m=1}^N V_m I_m^* = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{a}} (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{S}}) (\mathbf{U} + \mathbf{S}) \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{Q} \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{Q}_s \mathbf{a} \quad (21)$$

ここに、 $\tilde{\cdot}$ は共役行列 (adjoint matrix) を表し、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}, \quad \mathbf{Q}_s = \mathbf{S} - \tilde{\mathbf{S}} \quad (22a,b)$$

とされている。以下のように、 \mathbf{Q} はエルミート行列、 \mathbf{Q}_s はスキューエルミート行列となる。

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S} = \mathbf{Q}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_s = \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S} = -\mathbf{Q}_s \quad (23a,b)$$

したがって、式(21)の第1項は実数、第2項は純虚数となるので、式(20)の右辺と比較して次の関係を得る。

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{Q} \mathbf{a} = p_{\text{loss}}, \quad \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{Q}_s \mathbf{a} = 2j\omega(W_m - W_e) \quad (24a,b)$$

受動回路の場合には、 $p_{\text{loss}} \geq 0$ となるので、 \mathbf{Q} は非負エルミート行列となり、特に、回路が無損失の場合には、 $p_{\text{loss}} = 0$ より

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S} = \mathbf{U} \quad (25)$$

となり、 \mathbf{S} はユニタリ行列となる。行列要素を用いた形式に書き直すと次式となる。

$$\sum_{m=1}^N S_{mi}^* \cdot S_{mj} = \delta_{ij} \quad (26)$$

ここに、 δ_{ij} は、クロネッカーのデルタである。

このユニタリ条件は、種々の方法で導出された無損失回路の \mathbf{S} パラメータの妥当性を確認するために有効である。

次に、無損失可逆回路の周波数特性について簡単に述べる。詳細は省くが、次式が成立する^{(2),(3)}。

$$\tilde{\mathbf{a}} j \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}_\omega \mathbf{a} = W_m + W_e \quad (27)$$

ここに、 \mathbf{S}_ω は \mathbf{S} の各要素を ω で微分した行列である。いま、1ポート回路とすれば、式(27)は入力インピーダンス (アドミタンス) に関するフォスターのリアクタンス定理に相当する反射係数の条件式である。この場合、 \mathbf{S} は反射係数 S_{11} となり無損失性から次式とできる。

$$S_{11} = e^{-j\phi(\omega)} \quad (28)$$

これを式(27)へ代入すれば、次式を得る。

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{|a_1|^2} (W_m + W_e) \quad (29)$$

上式は、反射係数の位相は周波数と共に必ず遅れることを示している。また、 $d\phi/d\omega$ は入射波のエネルギーが反射して帰ってくるまでの時間 (遅延時間) と解釈できる⁽²⁾ので、式(29)は入射電力に対して回路に蓄積される電磁エネルギーが大きいほど帰ってくる時間が遅くなることを意味している。

2.5 Nポート回路の一般的性質

2.5.1 2ポート回路

回路が無損失であると仮定すれば、式(26)から

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \quad |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \quad (30a,b)$$

$$S_{11} S_{12}^* + S_{21} S_{22}^* = 0 \quad (30c)$$

が成立する。いま、 $S_{11} = 0$ とすれば、式(30a)、(30c) から $S_{22} = 0$ となる。逆に、 $S_{22} = 0$ のときには $S_{11} = 0$ となる。すなわち、一方のポートで整合をとれば、他ポートは自動的に整合されることになる。

無損失に加えて回路が可逆であるとすれば、 $S_{12} = S_{21}$ となるので、式(30)から

$$|S_{11}|^2 = |S_{22}|^2, \quad |S_{12}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} \quad (31a,b)$$

$$\arg S_{12} = \frac{1}{2}(\arg S_{11} + \arg S_{22}) + \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \quad (31c)$$

を得る。これより、無損失可逆2ポート回路の特性は3つのパラメータで決定できることが分かる。

次に、可逆2ポート回路のポート②に反射係数が Γ の負荷が接続された回路を考える。この場合、ポート①から見た電圧反射係数 Γ' は次式となる。

$$\Gamma' = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{\Gamma S_{12}^2}{1 - \Gamma S_{22}} \quad (32)$$

Γ と Γ' の間には双一次変換の関係が成立するので、両者は複素平面上で円-円対応する。この性質を利用して、短絡回路 $\Gamma = -e^{j2\beta l}$ (l は短絡位置までの線路長) などのような既知の変負荷を接続して Γ' を測定することにより2ポート回路のSパラメータを決定する方法がある(Deschampsの方法⁴⁾)。

2.5.2 3ポート回路

いま、全ポートの整合(完全整合)を仮定すれば、

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \quad (33)$$

となる。上式を式(26)のユニタリ条件に代入すれば

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = |S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 = |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (34a)$$

$$S_{31}S_{32}^* = S_{21}S_{23}^* = S_{12}S_{13}^* = 0 \quad (34b)$$

を得る。ここで回路の可逆性を仮定すると、式(34b)は

$$S_{13}S_{23}^* = S_{12}S_{23}^* = S_{12}S_{13}^* = 0 \quad (35)$$

となる。式(35)が成立するためには、 S_{12} 、 S_{13} 、 S_{23} の3つのパラメータのうち2個が0となり、式(34a)と矛盾する。このことから、無損失可逆3ポート回路を完全整合することは不可能であることが分かる。

なお、1つのポートだけが整合されている場合には、残り2つのポート相互間を分離することは不可能となる。すなわち、出力ポート間がアイソレートした2電力分配器を無損失3ポート回路で構成することは不可能である。

回路が非可逆で完全整合されているとすれば、式(34b)の第1式から $S_{31} = 0$ または $S_{32} = 0$ となる。何故ならば、両者が共に0の場合には、式(34a,b)から

$S_{23} = S_{13} = 0$ となり、式(34a)の最後の式と矛盾する。

いま、 $S_{31} = 0$ 、 $S_{32} \neq 0$ を仮定すれば、式(34a,b)から

$$S_{31} = S_{23} = S_{12} = 0, \quad |S_{21}| = |S_{13}| = |S_{32}| = 1 \quad (36a,b)$$

を得る。この場合にはポート①→②→③→①と巡回するサーキュレータ回路となる。 $S_{31} \neq 0$ で $S_{32} = 0$ の場合には、逆方向に巡回するサーキュレータとなる。すなわち完全整合された無損失非可逆3ポート回路は必ずサーキュレータ特性を有することになる。

2.5.3 4ポート回路

4ポート回路は、マイクロ波、ミリ波回路システムで、方向性結合器やハイブリッド回路などとして多用されている。無損失可逆4ポート回路において、4ポート全てが整合され、任意の2組のポート間が分離しているとき、その回路を方向性結合器という。この意味において、マジックTなどのハイブリッドは、3dBの結合度を有する方向性結合器である。一般に、4ポート回路が方向性結合器となる必要条件是、任意の2つのポートの反射係数が0で、かつそれらのポート間、あるいはそれらのポートの一つと他のいずれかのポート間に結合がない場合、または4つのポートが全て整合されている場合の3通りである⁵⁾。これらの条件は、前節までと同様に散乱行列の対称性とユニタリ条件を用いれば導出できるが、紙数の都合もあり読者のための課題として残しておく。

3. 対称構造回路の取り扱いとその特性

折り返し(鏡映)や回転などの対称操作によって回路形状が変わらない回路を対称回路(接合)という。対称回路では、鏡映操作や回転操作など回路の対称構造に合う対称変換を用いれば、その回路特性を見通しよく議論することができる⁶⁾。本章では、いくつかの対称回路について概説するが、必要となる行列代数の定理等については適宜挿入する。なお、各ポートの特性インピーダンスは1に規格化されているものとする。

3.1 固有ベクトル励振

いま、回路の散乱行列 \mathbf{S} の固有ベクトルを $\mathbf{a}^{(i)}$ 、固有値を $s^{(i)}$ とすれば、式(6)から次式が成立する。

$$\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{S}\mathbf{a}^{(i)} = s^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} \quad (37)$$

これより次のように書くことができる。

$$s^{(i)} = b_1^{(i)}/a_1^{(i)} = b_2^{(i)}/a_2^{(i)} = \dots = b_N^{(i)}/a_N^{(i)} \quad (38)$$

上式は、各ポートを固有ベクトル $\mathbf{a}^{(i)}$ で励振すれば、全ポートの反射係数が相等しい値 $s^{(i)}$ となることを示している。 N ポート回路に対しては、このような固有励振法が N 通りあり、各励振に対応して N 個の固有値がある(いくつかは等しい値(縮退)となる場合もある)。

また、式(15)、(16)のように \mathbf{S} 、 $\bar{\mathbf{Z}}$ 、 $\bar{\mathbf{Y}}$ は互いに有理行列関数で表現できるので、これらの固有ベクトルは一致し、 $\bar{\mathbf{Z}}$ と $\bar{\mathbf{Y}}$ の固有値をそれぞれ $z^{(i)}$ 、 $y^{(i)}$ とすれば、式(16)で $\mathbf{S} \rightarrow s^{(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{Z}} \rightarrow z^{(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{Y}} \rightarrow y^{(i)}$ とおけば

$$z^{(i)} = 1/y^{(i)} = (1 + s^{(i)})/(1 - s^{(i)}) \quad (39)$$

を得る。固有励振時には全ポートの(入力)インピーダンス(アドミタンス)も相等しい値 $z^{(i)}$ ($y^{(i)}$)となる。

3.2 対称2ポート回路

図2は誘導性の厚窓が対称面 F に置かれた対称2ポート回路を示している。一般に、対称2ポート回路

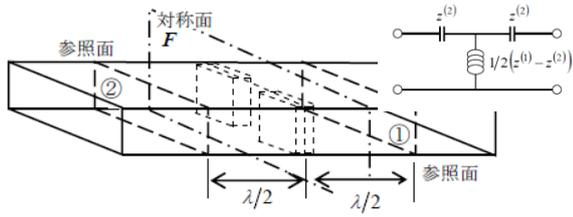


図2 導体厚窓対称2ポート回路

のポート①と②を互換（対称変換）した場合の入射波および反射波ベクトル \mathbf{a}' と \mathbf{b}' は、それぞれ

$$\mathbf{a}' = \mathbf{F}\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (40a,b)$$

と書ける。ポート番号を空間に固定し、回路構造が自分自身に変換されると考え（以下同様）、鏡映変換を

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

表している。変換前の元の回路の散乱行列を \mathbf{S} とすれば、回路の対称性から変換後の回路に対しても

$$\mathbf{b}' = \mathbf{S}\mathbf{a}' \quad (42)$$

が成立する。式(40) と(42)から $\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{F}\mathbf{a}$ となるので、任意の入射波ベクトルに対して

$$\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{F} \quad (43)$$

が成立しなければならない。すなわち \mathbf{S} と \mathbf{F} は可換となる。したがって、 \mathbf{F} の固有ベクトルから \mathbf{S} のそれを決定できる（可換行列の固有ベクトルは一致する）。鏡映変換 \mathbf{F} を2回施せば元に戻るので、 $\mathbf{F}^2 = \mathbf{U}$ となり、 \mathbf{F} の固有値 f は $f^2 = 1$ から決まる。これより $f = \pm 1$ となり、 \mathbf{F} の固有値 $f^{(i)}$ ($i=1, 2$) とそれに対応する規格化固有ベクトル $\mathbf{x}^{(i)}$ は次式となる。

$$f^{(1)} = +1, \quad f^{(2)} = -1 \quad (44a,b)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^t \quad (45a,b)$$

式(45)は \mathbf{S} の固有ベクトルでもあるので、 $\mathbf{x}^{(i)} \rightarrow \mathbf{a}^{(i)}$ とおき直し、対応する \mathbf{S} の固有値を $s^{(1)}, s^{(2)}$ とすれば

$$\mathbf{S}\mathbf{a}^{(i)} = s^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} \quad (i=1, 2) \quad (46)$$

となる。式(45), (46)から、 $s^{(1)}, s^{(2)}$ はポート①と②を対称面 F に関して、それぞれ偶、奇励振した場合の固有値、すなわち、面 F を開放および短絡境界とした場合のポート① (②) の（電圧）反射係数と一致する。

また、式(46)は次の形式に書くことができる。

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{S}_d \quad (47)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} & \mathbf{a}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_d = \text{diag} \begin{bmatrix} s^{(1)} & s^{(2)} \end{bmatrix} \quad (48a,b)$$

さらに、式(47)から、式(45) と式(48) を考慮すれば、

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{S}_d\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{S}_d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s^{(1)} + s^{(2)} & s^{(1)} - s^{(2)} \\ s^{(1)} - s^{(2)} & s^{(1)} + s^{(2)} \end{bmatrix} \quad (49)$$

を得る。すなわち、偶励振および奇励振時の $s^{(1)}, s^{(2)}$

から散乱行列を決定できる。

なお、 $\mathbf{a}^{(i)}$ は \mathbf{Z} 行列の固有ベクトルでもあり、対応する固有値は式(16)から次式で与えられる。

$$z^{(i)} = \frac{1 + s^{(i)}}{1 - s^{(i)}} \quad (50)$$

ここで、式(49)の導出と同じ手順を用いると

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z^{(1)} + z^{(2)} & z^{(1)} - z^{(2)} \\ z^{(1)} - z^{(2)} & z^{(1)} + z^{(2)} \end{bmatrix} \quad (51)$$

となる。これより参照面を端子対とした T 型等価回路で表せば図2の挿入図のようになる。導体窓の厚さを無視できるとき、奇励振時には面 F は短絡となるので、半波長離れた参照面では $z^{(2)} = 0$ となる。すなわち、導波管中に挿入された厚さが無視できる導体窓（障害物）はシャント素子として取り扱うことができる。

3.3 対称3ポート回路

3.3.1 対称H面Y型3ポート回路

図3に示すように、この回路は3つの対称面 $F_1 \sim F_3$ を持ち、それらが交差する軸に対して3重回転対称となる。

回路形状は、 $2\pi/3$ と $4\pi/3$ の回転に対して不変となる。これらの回転操作をそれぞれ $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ で表し、対称面 $F_1 \sim F_3$ に関する鏡映操作を $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_3$ とする。図3から \mathbf{R}_1 は次式のように書くことができる。

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

変換後の入射波と反射波ベクトル \mathbf{a}' と \mathbf{b}' は、

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{R}_1\mathbf{b} \quad (53a,b)$$

となり、式(43)の導出と同じ手順で $\mathbf{R}_1\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{R}_1$ を得る。同様にして、 \mathbf{R}_1 は \mathbf{Z}, \mathbf{Y} と可換となる。

また、回路が相反（可逆）であれば、鏡映変換 \mathbf{F}_1 は

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

となり、同様な手順で \mathbf{F}_1 も $\mathbf{S}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}$ と可換となる。

図3から分かるように、 \mathbf{R}_1^3 は恒等変換 \mathbf{U} に等しい

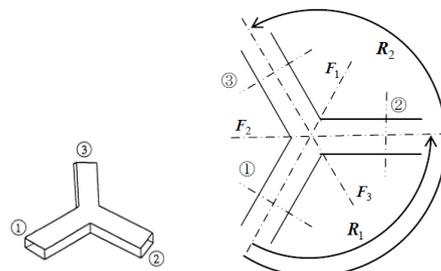


図3 対称H面Y型3ポート回路とその対称操作

ので、 $r^3=1$ となり \mathbf{R}_1 の固有値は次式で与えられる。

$$r^{(1)}=1, \quad r^{(2)}=\alpha_1, \quad r^{(3)}=\alpha_2 \quad (55a,b,c)$$

ここに、 $\alpha_1=e^{-j2\pi/3}=-1/2-j\sqrt{3}/2, \alpha_2=e^{-j4\pi/3}=-1/2+j\sqrt{3}/2$ 。
また、各固有値に対応する固有ベクトルは次式となる。

$$\mathbf{x}^{(1)}=[1 \ 1 \ 1]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)}=[1 \ \alpha_2 \ \alpha_1]^T, \quad \mathbf{x}^{(3)}=[1 \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T \quad (56a,b,c)$$

上述のように、 \mathbf{R}_1 は \mathbf{S} 、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{Y} と可換であるので、式(56)で与えられる $\mathbf{x}^{(j)}$ は、これら各回路行列の固有ベクトルとなる。

いま、 $\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{x}^{(3)}$ 、 $\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{(3)}=\mathbf{x}^{(2)}$ となることに注意すれば、 \mathbf{S} と \mathbf{F}_1 の可換性より次式が成立する。

$$\mathbf{S}\mathbf{x}^{(3)}=\mathbf{S}(\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{(2)})=\mathbf{F}_1\mathbf{S}\mathbf{x}^{(2)}=s^{(2)}\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{(2)}=s^{(2)}\mathbf{x}^{(3)} \quad (57)$$

これより $s^{(2)}$ と $s^{(3)}$ は \mathbf{S} の縮退固有値となる。

可逆無損失回路の \mathbf{Z} は純虚数の対称行列となるので、その固有ベクトルを純実数に選ぶことができる(要素が純虚数の対称行列の固有値は純虚数となり、固有ベクトルは純実数に選ぶことができる)。 $\mathbf{x}^{(j)}$ は \mathbf{Z} の固有ベクトルでもあるので、 $\mathbf{x}^{(1)}$ 、および $\mathbf{x}^{(2)}$ 、 $\mathbf{x}^{(3)}$ の一次結合を用いれば、次のような3つの純実数の直交固有ベクトルを得る。

$$\mathbf{y}^{(1)}=\mathbf{x}^{(1)}=[1 \ 1 \ 1]^T \quad (58a)$$

$$\mathbf{y}^{(2)}=\mathbf{x}^{(2)}+\mathbf{x}^{(3)}=[2 \ -1 \ -1]^T \quad (58b)$$

$$\mathbf{y}^{(3)}=(j/\sqrt{3})(\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^{(3)})=[0 \ 1 \ -1]^T \quad (58c)$$

ここで、固有ベクトル $\mathbf{x}^{(j)}$ での励振時の回路内における電磁界分布について考える。式(38)から回路が無損失の場合には $|s^{(j)}|=1$ となるが、入出力線路上には進行波が存在している。例えば、 $\mathbf{x}^{(2)}$ での励振を考えると、各ポートから $2\pi/3$ ずつ時間位相の異なる信号が回路内へ入射し、対称軸の近傍では電磁界は入射波の1周期で1回転する。 $\mathbf{x}^{(3)}$ の場合には回転の向きが逆転する三相解となり、いずれの場合にも対称軸に平行な電磁界は軸上で0となる。

次に、固有ベクトル $\mathbf{y}^{(j)}$ による励振を考えると、 $\mathbf{y}^{(1)}$ は $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_3$ の固有値が+1となる場合の固有ベクトルでもあるので、対称面は開放となり、各ポートは図4(a)に示すようにV字型の磁気壁で終端した回路と等価になる。また、 $\mathbf{y}^{(2)}$ と $\mathbf{y}^{(3)}$ はそれぞれ \mathbf{F}_1 の偶、奇固有ベクトルであるので、 $\mathbf{y}^{(2)}$ 、 $\mathbf{y}^{(3)}$ で励振された場合には、同図(b)、(c)に示すようにポート①の対称面がそれぞれ開放、短絡となる場合に相当する、図4(b)、(c)を一見して、両者が縮退($s^{(2)}=s^{(3)}$)していることを理解す

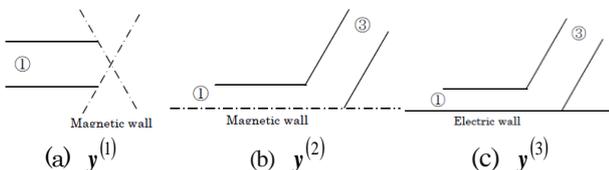


図4 各固有励振に対する境界条件

ることは難しいが、例えば、ストリップ線路で構成された対称Y型分岐回路で、線路幅の効果を無視すれば $s^{(2)}=s^{(3)}$ を確認できる(証明は読者に委ねる)。

いま、 $\mathbf{y}^{(1)}/\sqrt{3} \rightarrow \mathbf{a}^{(1)}$ 、 $\mathbf{y}^{(2)}/\sqrt{6} \rightarrow \mathbf{a}^{(2)}$ 、 $\mathbf{y}^{(3)}/\sqrt{2} \rightarrow \mathbf{a}^{(3)}$ とおけば、

$$\mathbf{S}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{S}_d \quad (59)$$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}^{(1)} \ \mathbf{a}^{(2)} \ \mathbf{a}^{(3)}], \quad \mathbf{S}_d=\text{diag}[s^{(1)} \ s^{(2)} \ s^{(2)}] \quad (60a,b)$$

を得る。 \mathbf{A} は直交行列($\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{U}$)なので、

$$\mathbf{S}=\mathbf{A}\mathbf{S}_d\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha &= (s^{(1)}+2s^{(2)})/3 \\ \beta &= (s^{(1)}-s^{(2)})/3 \end{aligned} \quad (61)$$

上式とユニタリ条件より直ちに $\alpha \neq 0$ となる。また、 $|s^{(j)}|=1$ を考慮すれば、本回路の最良の反射特性となる条件は $s^{(1)}=-s^{(2)}$ である。このとき次式を得る。

$$\mathbf{S}=\frac{s^{(1)}}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$|s^{(1)}|=1$ より、反射損失の最良値は $|S_{11}|^2=1/9$ となる。

対称軸に沿って導体ピンを挿入した場合、 $s^{(1)}$ はその影響を受けるが、 $s^{(2)}$ は、軸に沿った電界が0であるので影響を受けない。したがって、対称軸に挿入した導体ピンで $s^{(1)}=-s^{(2)}$ に向けた調整が可能となる。

3.3.2 対称Y型非可逆回路

この場合、回転対称 \mathbf{R}_1 が生成子となる。いま、 \mathbf{S} の規格化固有ベクトルを $\mathbf{a}^{(j)}$ を、式(56)から $\mathbf{x}^{(j)}/\sqrt{3}$ とおき、対応する \mathbf{S} の固有値を $s^{(j)}$ とすれば、式(59)と同様な手順で $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{U}$ を考慮することにより次式を得る。

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha &= (s^{(1)}+s^{(2)}+s^{(3)})/3 \\ \beta &= (s^{(1)}+s^{(2)}\alpha_2+s^{(3)}\alpha_1)/3 \\ \gamma &= (s^{(1)}+s^{(2)}\alpha_1+s^{(3)}\alpha_2)/3 \end{aligned} \quad (63)$$

上式は、ポート①、②、③が巡回的に結合することを示しており、整合条件 $\alpha=0$ が満たされれば、 $\beta=0$ 又は $\gamma=0$ となり、サーキュレータとなる。また、もし回路が可逆であれば、 $\beta=\gamma$ となり式(61)と一致する。

サーキュレータとなる条件は、 $|s^{(j)}|=1$ より3個の固有値 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)}$ 、 $s^{(3)}$ の位相が互いに $2\pi/3$ ずつ異なることである。この条件から導出した非可逆対称Y型回路の等価アドミタンスを、外部回路で整合してサーキュレータ特性を実現する方法⁽⁶⁾があるがここでは紙数の都合で割愛し、講座で紹介する。

3.4 対称4ポート回路

3.4.1 2重鏡映対称4ポート回路

図5に示す2重鏡映対称4ポート回路について考え

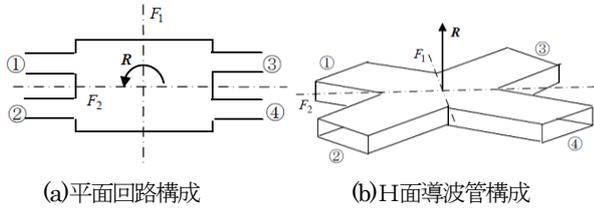


図5 2重鏡映対称4ポート回路

る。回路構成例としてストリップ線路形平面回路とH面導波管型4ポートを示している。いま、対称面 F_1, F_2 に関する鏡映操作を F_1, F_2 とすると

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (64a,b)$$

と書ける。また、 R は 180° の回転操作で、 F_1, F_2, R 相互間には次のような関係が成立する。

$$F_1^2 = F_2^2 = R^2 = U \quad (65)$$

$$F_1 F_2 = R, \quad F_2 R = F_1, \quad R F_1 = F_2 \quad (66a,b,c)$$

この場合も同様に、 F_1, F_2, R は S と可換である。生成子となる F_1 と F_2 の固有方程式は共に $(f^2 - 1)^2 = 0$ となり、2重に縮退した固有ベクトルを持つことになる。そのため、固有値が非縮退となる F_1 と F_2 の一次結合で作られる新しい行列 M を考える。

$$M = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 \quad (67)$$

F_1, F_2 と S の可換性から M と S も可換となる。いま、

$$\varepsilon_1 = (1+j)/2, \quad \varepsilon_2 = (1-j)/2 \quad (68a,b)$$

とおけば、式(66)より $M^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)U + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R = R$ となり $M^4 = R^2 = U$ を得る。これより M の固有値 m に関する特性方程式は $m^4 = 1$ となり、次の結果を得る。

$$m^{(1)} = 1, \quad m^{(2)} = j, \quad m^{(3)} = -1, \quad m^{(4)} = -j \quad (69)$$

式(67)から容易にわかるように、 M と F_1, F_2 は可換であるので、 M の固有ベクトル $\mathbf{x}^{(j)}$ ($j=1 \sim 4$)は F_1, F_2 の固有ベクトルとなる。

まず、 $m^{(1)} = 1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$ を考えると、 $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(1)} = (\varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2)\mathbf{x}^{(1)} = (\varepsilon_1 f_1^{(1)} + \varepsilon_2 f_2^{(1)})\mathbf{x}^{(1)}$ の関係を満たさなければならないので、 $\varepsilon_1 f_1^{(1)} + \varepsilon_2 f_2^{(1)} = 1$ となり、 $f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = 1$ となる。したがって、

$$F_1 \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}, \quad F_2 \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} \quad (70a,b)$$

が成立するので、式(70a)から $x_1^{(1)} = x_3^{(1)}, x_2^{(1)} = x_4^{(1)}$ 、式(70b)から $x_1^{(1)} = x_2^{(1)}, x_3^{(1)} = x_4^{(1)}$ の関係を得る。以上より、 $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = x_4^{(1)}$ となり固有ベクトルを求めることができる。他の固有値に対しても同様の手順で導出でき、規格化固有ベクトルを改めて $\mathbf{a}^{(j)}$ とおけば $\mathbf{a}^{(1)} = (1/2)[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ 、 $\mathbf{a}^{(2)} = (1/2)[1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$ (71a,b)
 $\mathbf{a}^{(3)} = (1/2)[1 \ -1 \ -1 \ 1]^T$ 、 $\mathbf{a}^{(4)} = (1/2)[1 \ 1 \ -1 \ -1]^T$ (71c,d)となる。 S と M は可換であるので、式(71)は S の固有

ベクトルとなる。式(59)~(61)の手順を準用すれば

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha &= (s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + s^{(4)})/4 \\ \beta &= (s^{(1)} - s^{(2)} - s^{(3)} + s^{(4)})/4 \\ \gamma &= (s^{(1)} + s^{(2)} - s^{(3)} - s^{(4)})/4 \\ \delta &= (s^{(1)} - s^{(2)} + s^{(3)} - s^{(4)})/4 \end{aligned} \quad (72)$$

を得る。ここに、 $s^{(j)}$ は S の固有値である。

(方向性結合器となる条件)

回路が完全整合となるためには、 $\alpha = 0$ が成立しなければならない。無損失条件より $|s^{(j)}| = 1$ となるので、 $\alpha = 0$ となるためには $s^{(1)} \sim s^{(4)}$ のうち2個ずつが逆位相の関係にななければならない。

この条件は次の3通りとなる。

$$(1) \quad s^{(1)} = -s^{(4)}, \quad s^{(2)} = -s^{(3)} \quad \dots \beta = 0 \quad (73a)$$

$$(2) \quad s^{(1)} = -s^{(2)}, \quad s^{(3)} = -s^{(4)} \quad \dots \gamma = 0 \quad (73b)$$

$$(3) \quad s^{(1)} = -s^{(3)}, \quad s^{(2)} = -s^{(4)} \quad \dots \delta = 0 \quad (73c)$$

上式は、2.5.3で述べたように、完全整合4ポート回路は方向性結合器となることを示している。(1)の場合を、少し詳しく検討してみよう。この場合式(73a)から

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \gamma &= (s^{(1)} + s^{(2)})/2 \\ \delta &= (s^{(1)} - s^{(2)})/2 \end{aligned} \quad (74)$$

となり、これより次式が導出される。

$$\frac{S_{31}}{S_{41}} = \frac{s^{(1)} + s^{(2)}}{s^{(1)} - s^{(2)}} = \frac{1 + e^{j\phi}}{1 - e^{j\phi}} = \left| \frac{1 + \cos\phi}{1 - \cos\phi} \right| e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad (75)$$

ここに、復号は $\phi = \arg s^{(2)} - \arg s^{(1)}$ の正負に同順。

式(75)は、2重鏡映対称の方向性結合器は、結合度が $C = 20 \log_{10} [(1 + \cos\phi)/(1 - \cos\phi)]$ [dB]で与えられる 90° カプラとなる。 $s^{(1)}$ と $s^{(2)}$ が直交するとき($\phi = \pi/2$)、3-dBカプラとなることを示している。

ここで、図6に示すように、図5(a)の対称面 F_1 に終端開放スタブを装荷した回路を考える。 $\mathbf{a}^{(3)}$ と $\mathbf{a}^{(4)}$ の固有励振時には、 F_1 は電気壁となるので、スタブはその固有値 $s^{(3)}, s^{(4)}$ にはほとんど影響を与えないが、 $\mathbf{a}^{(1)}$ と $\mathbf{a}^{(2)}$ に対しては磁気壁となるため、スタブはその固有値 $s^{(1)}, s^{(2)}$ の値を変化させる。そのため、方形平面回路の形状のみで整合の実現が困難な場合には、図6のスタブの幅と長さを調整することで、式(73a)の整合条件に近付けることが可能となる。

図5(b)の回路では、回転軸に沿って導体棒を挿入すれば、 $s^{(2)} \sim s^{(4)}$ にはほとんど影響を及ぼさないので、 $s^{(1)}$ の値のみを調整することがで

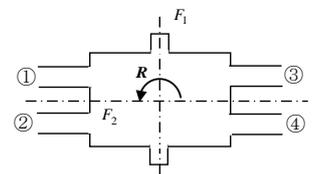


図6 整合用スタブの装荷

きる。また、例えば対称面 F_2 に沿って導体窓を挿入すれば、他の固有値に影響を及ぼさないで、 $s^{(1)}$ と $s^{(4)}$ の調整が可能となる。このような特性を利用して整合を試みることができる⁽³⁾。

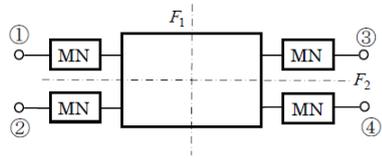


図7 外部整合回路と2重対称4ポート

ここで、図7に示すように、4個のポートに同一の整合回路(MN)を接続した場合について検討する。MN装荷後の回路も2重鏡映対称となっているので、その S の固有値を $s^{(1)} \sim s^{(4)}$ とおけば、整合条件は上記と同じ議論が可能である。 $\beta = 0 (S_{21} = 0)$ とする場合、式(73a)と同様に、 $s^{(1)} = -s^{(4)}$ と $s^{(2)} = -s^{(3)}$ が成立すればよい。

(外部回路による整合問題)

いま、MN装荷後の S の固有値 $s^{(j)}$ に対応する固有サセプタンスを $iy^{(j)} = (1 - s^{(j)}) / (1 + s^{(j)})$ とおき、装荷前の原型回路のそれを $iy^{(j)}$ 、MNのF行列要素を A, jB, jC, D とすれば、次式を得る。

$$y^{(j)} = (C + y^{(j)}D) / (A - y^{(j)}B) \quad (76)$$

また、 $y^{(j)}$ に関する整合条件は、 $s^{(j)}$ の関係式から $y^{(1)} = -1/y^{(4)}$ と $y^{(2)} = -1/y^{(3)}$ と書き直すことができるので、この両式に式(76)を代入、整理すれば、この4ポートの整合問題は等価アドミタンス $Y_{eq} = G_e + jY_e$ の1ポート整合問題に簡約化される^{(8),(9)}。

$$G_e^2 = - \frac{(y^{(1)} - y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(3)})(y^{(4)} - y^{(2)})(y^{(4)} - y^{(3)})}{(y^{(1)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y^{(3)})^2} \quad (77a)$$

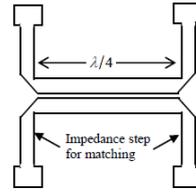
$$Y_e = (y^{(1)}y^{(4)} - y^{(2)}y^{(3)}) / (y^{(1)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y^{(3)}) \quad (77b)$$

さらに、整合時の電力分配比 $R = |S_{31}/S_{41}|^2$ は

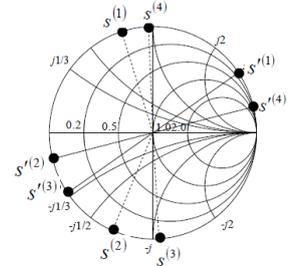
$$R = - \frac{(y^{(1)} - y^{(3)})(y^{(4)} - y^{(2)})}{(y^{(1)} - y^{(2)})(y^{(4)} - y^{(3)})} \quad (77c)$$

となる。これより、整合時の R は原型回路で決まる不変量となっている⁽¹⁰⁾。また、 $R > 0$ ならば等価アドミタンスが必ず定義できる。この設計法は、ブランチラインカップラなどの広帯域設計に非常に有効である⁽¹¹⁾。

ここでは、応用例の一つとして図8(a)に示すマイクロストリップ1/4波長バックワードカップラの方向性改善について述べる⁽¹²⁾。同図では整合回路も装荷した構成となっているが、1/4波長分布結合線路部の原型回路では、偶モードと奇モードの位相速度が異なるためフォワード結合が生じて方向性が劣化する。すなわち、両モードの位相速度の差異により、同図(b)に示すように、完全整合状態が実現できないことに起因している。そのため同図(a)に示すインピーダンスステップを用いて整合を図ると、同図(b)のように二組の固有値が逆



(a)整合回路付きカップラ



(b) 原型・整合時の固有値

図8 整合回路付き $\lambda/4$ カップラと整合回路による固有値の調整位相となり整合が実現する。具体的な回路構造や設計法に関する詳しい内容は文献(12)に示されている。

3.4.2 鏡映対称4ポート回路 (マジック T)

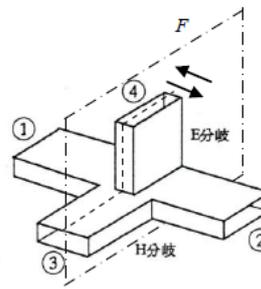
図9に示すような対称面 (F) を一つだけ持つ4ポート回路について考える。同図(a)はよく知られたマジック T である。同図(b)は、単一モード導波管 (TE_{10} モード) とオーバーマード導波管 (TE_{20} モード) の管軸を一致させるように接続したH面導波管型マジック T⁽¹³⁾ を示しており、もしポート④に TE_{20} モードだけが励振されているとすると (同図のように理想的な TE_{10} - TE_{20} モード変換器を想定)、この回路も対称面 F に関して対称な4ポート回路と考えることができる。この場合、両回路の鏡映変換 F は次式で表わすことができる。

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

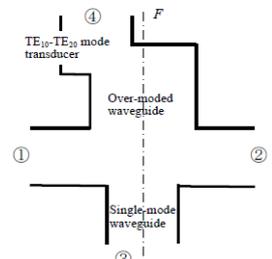
F と S は可換であるので、 $S = FFS = FSF$ となる。

これより、直ちに $S_{11} = S_{22}$ 、 $S_{31} = S_{32}$ 、 $S_{41} = -S_{42}$ 、 $S_{34} = 0$ が得られる。いま、対称面上にあるポート③と④が整合されていると仮定すれば、 $S_{11} = S_{12} = 0$ と $|S_{13}|^2 = |S_{14}|^2 = 1/2$ がユニタリ条件から得られるので、参照面を適当に設定すれば、 S は次の形に書ける。

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$



(a)通常マジック T



(b)H面平面マジック T

図9 マジック T とその対称面

上記を言い換えれば、対称面上に結合しない2つのポートをもつ対称、無損失4ポート回路は、これらのポートを整合すれば、必ずハイブリッド回路とできる。

この考え方をういて導波管と同軸線路の組合せやマイクロストリップとスロット線路の組合せなどによる種々の回路構成が考案されている。

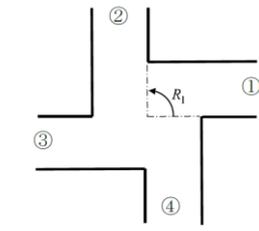


図10 4重回転対称回路

3.4.3 回転対称4ポート回路 (横断回路)

図10に示すような4重回転対称回路について考えると、生成子となる90°回転操作 R_1 は、

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

となり、 $R_1^4 = U$ の関係から R_1 の固有値 $r^{(1)} \sim r^{(4)}$ は、順に $1, j, -1, -j$ となり、各固有値に対応する規格化固有ベクトル $a^{(1)} \sim a^{(4)}$ は次式で与えられる。

$$a^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T / 2, \quad a^{(2)} = [1 \ -j \ -1 \ j]^T / 2 \quad (81a,b)$$

$$a^{(3)} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T / 2, \quad a^{(4)} = [1 \ j \ -1 \ -j]^T / 2 \quad (81c,d)$$

ここでは紙数の関係で詳細は省略するが、 R_1 と S は可換であるので、式(81)は S の固有ベクトルと一致するという事実を用いて、これまでの議論と同様にして S を求めると、図10に示すような4分割の回転対称性をもつ可逆回路を完全整合すれば、必ず横断回路(交差回路)⁽¹⁴⁾となることが分かる。

3.5 対称マルチポート回路

ポート数が増大した場合にも、回路構造の対称性に基づく変換操作を用いれば、見通しの良い解析が可能となり、回路特性の把握が容易になったり、新しい回路開発の指針を見出したりすることができる。

よく知られている対称マルチポート回路として、5重回転対称構造のスター回路⁽³⁾がある。この回路は、完全整合時に任意のポートからの入射電力を残りのポートに4等分配できるという特性を有している。また、6ポート回路としては円偏波発生器などに利用されるターンスタイル回路⁽³⁾や6ポートマジック接合⁽¹⁵⁾が、8ポート回路としては通常の4ポートハイブリッド回路の特性を拡張した8ポートハイブリッド回路などが提案されている⁽¹⁶⁾⁻⁽¹⁸⁾。

ここでは、図11に示す6ポートマジック接合について簡単に説明する。同図に示すように、対称H面Y型3ポート回路の回転対称軸と管軸が一致するように、

上底に同軸線路を、下底に円形導波管を接続した回路を考える。円形導波管の基本TE₁₁モードは縮退しているので、同図のようにポート①と平行な偏波面をポート⑤、直交するそれを⑥とする。従って、物理的ポート数は5個であるが、電気的には6ポート回路となる。

いま、本回路の回転操作群の生成子となる120°回転対称変換 R_1 と鏡映変換 F_1 は次のように書ける。

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_H & \theta \\ \theta & R_V \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$R_1^3 = U$ となることに注意すれば、 $(r^3 - 1)^2 = 0$ を得る。これより固有値は $1, \alpha_1 = e^{-j2\pi/3}, \alpha_2 = e^{-j4\pi/3}$ となり、いずれも2重に縮退している。次に、各縮退固有値に対して直交する固有ベクトルを求めると次式となる。

$$r^{(1)} = 1; \quad y^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ \sqrt{3} \ 0 \ 0]^T \quad (84a)$$

$$y^{(4)} = [1 \ 1 \ 1 \ -\sqrt{3} \ 0 \ 0]^T \quad (84b)$$

$$r^{(2)} = \alpha_1; \quad y^{(2)} = [1 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ 0 \ \sqrt{3}/2 \ j\sqrt{3}/2]^T \quad (85a)$$

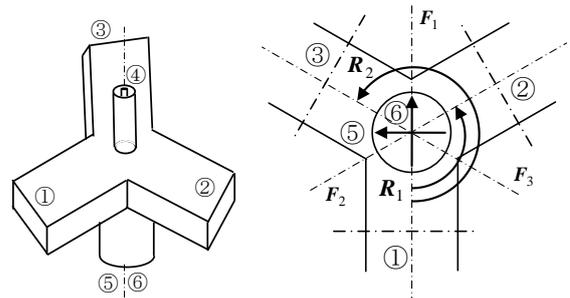
$$y^{(5)} = [1 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ 0 \ -\sqrt{3}/2 \ -j\sqrt{3}/2]^T \quad (85b)$$

$$r^{(3)} = \alpha_2; \quad y^{(3)} = [1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ 0 \ \sqrt{3}/2 \ -j\sqrt{3}/2]^T \quad (86a)$$

$$y^{(6)} = [1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ 0 \ -\sqrt{3}/2 \ j\sqrt{3}/2]^T \quad (86b)$$

回転操作 R_1 と S は可換であるので、 $y^{(j)}$ は S の固有ベクトルにもなる。いま、 $y^{(2)}$ と $y^{(3)}$ 、および $y^{(5)}$ と $y^{(6)}$ の一次結合を用いて、一次独立な S の固有ベクトル $a^{(j)}$ を純実数となるように求めると、式(85)、(86)から次式を得る。

$$s^{(1)}; \quad a^{(1)} = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} \ \sqrt{3}/2 \ 0 \ 0]^T / \sqrt{3} \quad (87a)$$



(a)スケッチ

(b) TE₁₁モードのポート番号と対称操作

図11 6ポートマジック接合とそのポート番号

$$s^{(2)}; \mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}^t / \sqrt{3} \quad (87b)$$

$$s^{(3)}; \mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}^t / \sqrt{3} \quad (87c)$$

$$s^{(4)}; \mathbf{a}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t / \sqrt{3} \quad (87d)$$

$$s^{(5)}; \mathbf{a}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t / \sqrt{3} \quad (87e)$$

$$s^{(6)}; \mathbf{a}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t / \sqrt{3} \quad (87f)$$

いま, $\mathbf{F}_1 \mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{y}^{(5)}$, $\mathbf{F}_1 \mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{y}^{(6)}$ となることに注意すれば $s^{(2)} = s^{(5)}$, $s^{(3)} = s^{(6)}$ となり, $s^{(2)}$ と $s^{(3)}$ は 2 重縮退となる. ここでも, 式(59)以下の同様な手順を準用することにより次式を得る.

$$S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \gamma & -\delta/2 & \sqrt{3}\delta/2 \\ \beta & \beta & \alpha & \gamma & -\delta/2 & -\sqrt{3}\delta/2 \\ \gamma & \gamma & \gamma & \varepsilon & 0 & 0 \\ \delta & -\delta/2 & -\delta/2 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\delta/2 & -\sqrt{3}\delta/2 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (88)$$

ここに,

$$\alpha = (s^{(1)} + s^{(4)})/2 + (s^{(2)} + s^{(3)}) \quad (89a)$$

$$\beta = (s^{(1)} + s^{(4)})/2 - (s^{(2)} + s^{(3)})/2 \quad (89b)$$

$$\gamma = \sqrt{3}(s^{(1)} - s^{(4)})/2, \quad \delta = \sqrt{3}/2(s^{(2)} - s^{(3)}) \quad (89c,d)$$

$$\varepsilon = 3(s^{(1)} + s^{(4)})/2, \quad \mu = 3(s^{(2)} + s^{(3)})/2 \quad (89e,f)$$

いま, 管軸を共有する同軸線路 (ポート④) と円形導波管 (ポート⑤, ⑥) が整合されていると仮定すると, $\varepsilon = \mu = 0$ より $s^{(1)} + s^{(4)} = 0$, $s^{(2)} + s^{(3)} = 0$ が成立しなければならない. これらの条件と式(89)から $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \sqrt{3}s^{(1)}$, $\delta = \sqrt{6}s^{(2)}$ を得る. $|s^{(j)}| = 1$ であることに注意すれば, 各ポートの参照面を適当に設定することにより, この場合の散乱行列は次式のようになる.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/3 & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

上式は, 互いに結合しない同軸線路と円形導波管を整合すれば, 同一平面内にある Y 型結合された 3 個の導波管も整合され, かつ互いにアイソレートされることを示している. また, 同軸からの入射波は同位相で 3 個の方形導波管に等分配される. また, 円形導波管から右旋, 又は左旋円偏波が入射した場合,

$$\mathbf{b} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a/\sqrt{2} & \pm ja/\sqrt{2} \end{bmatrix}^t \\ = (a/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 & e^{\pm j2\pi/3} & e^{\mp j2\pi/3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

となり, 3 個の導波管に 3 相関係で等分配される. この特性は, 3.4.2 で述べたマジック T の特性を 6 ポートに拡張しているということが出来る. この意味で 6 ポートマジック接合と呼んでいる. 整合法は固有励振時

の電磁界分布を考慮して行えばよい.

4. むすび

以上, マイクロ波回路を S パラメータで記述するための基本事項について述べるとともに, 回路の各種物理的条件によって決まる S パラメータの制約条件やそれによって各種受動回路素子が有することになる一般的な性質について述べた. また, 回路がもつ様々な対称性から導かれる S 行列の固有ベクトル等を用いて回路特性を導出する方法や, その知見を回路設計に活用する考え方などについて述べた. 対称回路の取り扱い, 1940 年代, 導波管回路系が主体であったマイクロ波技術の発展期に展開された解析法である⁽³⁾が, 特に, 温故知新という意味も込めて詳しく記述した.

参考文献

- (1) 太田勲, 「電磁波回路の S パラメータによる表現とその基本特性」, pp.427-436, MWE '97.
- (2) 黒川兼行; マイクロ波回路入門, 丸善, 1963.
- (3) C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of microwave circuits*, McGraw-Hill, Inc., 1948.
- (4) G. A. Deschamps, "Determination of reflection coefficients and insertion loss of a waveguide junction," *J. A. P.*, vol. 24, pp.1046-1050, Aug. 1953.
- (5) 小口文一; マイクロ波およびミリ波回路, 丸善, 1964.
- (6) G. P. Riblet, "The measurement of the equivalent admittance of 3-port circulator via an automated measurement system," *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol. 25, pp.402-405, May. 1977.
- (7) T. Kawai and I. Ohta, "Planar-circuit-type 3-dB quadrature hybrids," *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, vol. 42, pp.2462-2467, Dec. 1994.
- (8) G. P. Riblet, "A directional coupler with very flat coupling," *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol. 26, pp.70-74, Feb. 1978.
- (9) I. Ohta and T. Kawai, "Design of quadrature hybrids and directional couplers based on the equivalent admittance approach," *IEICE Trans. on Electronics*, vol.E88-C, pp. 2-14, Jan. 2005.
- (10) K. Araki and Y. Naito, "On the properties of lossless reciprocal 4-port circuits with reflection symmetry," *IEEE Trans., Circuit Syst.*, vol.39, pp.155-161, Feb. 1992.
- (11) S. Tanigawa, K. Hayashi, T. Fujii, T. Kawai, and I. Ohta, "Tri-band/broadband matching techniques for 3-dB branch-line couplers," *Proc. 37th EuMC*, pp.560-563, Oct. 2007.
- (12) 藤井, 河合, 太田, 小久保, 「等価アドミタンス法に基づくマイクロストリップ結合線路型 1/4 波長方向性結合器の設計法」, 信学誌(C), vol.J87-C, pp.1079-1085 Dec. 2004.
- (13) S. Matsumoto, I. Ohta, H. Ikeuchi, T. Kawai, M. Kishihara, K. Iio, and T. Kashiwa, "An H-plane waveguide 180-degree hybrid ~A planar magic-T~," *Proc. 40th EuMC*, pp.814-817, Sept. 2010.
- (14) H. Ikeuchi, T. Kawai, M. Kishihara, and I. Ohta, "Design of an H-plane waveguide intersection with high isolation," *IEICE Trans. on Electronics*, vol.E94-C, pp.1572-1578, Oct. 2011.
- (15) I. Ohta, "A new six-port network: Six-port magic junction," *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, vol. 36, pp.859-864, May. 1988.
- (16) G. P. Riblet, "Compact planar microstrip-slotline symmetrical ring eight-port comparator circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol. 38, pp.1421-1426, Oct. 1990.
- (17) I. Ohta, T. Kawai, S. Shimahashi, and K. Iio, "A transmission line-type eight-port hybrid," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol.1, pp.119-122, June 1992.
- (18) G. P. Riblet, "Synthesis of eight-port comparator circuits using Dicke's method," *IEE Proc. -H*, vol.140, pp.274-278, Aug. 1993.