

改めて学び直す現場指向のマイクロ波伝送理論と基本回路設計 —自由自在のスミスチャートとS行列—

Anew-learning Microwave Guided Theory and Basic Circuit Design for Young Engineers in Industrial Battlefields —Using the Smith-chart and S-matrix efficiently—

黒木 太司
Futoshi KUROKI

(独)国立高専機構 呉工業高等専門学校 〒737-8506 広島県呉市阿賀南 2-2-11
† Kure National College of Technology 2-2-11 Aga-Minami, Kure, Hiroshima, 737-8506 Japan
E-mail: kuroki@kure-nct.ac.jp

Abstract

Anyone always feels the microwave engineering was so difficult and the physical images of several phenomena were hard to be understood. This tutorial will be done by the author with the mindset of such young engineers to want to re-learn the microwave guided theory based on his trying experience, learning by mistake on how to master the essence of the microwaves by the level of high school knowledge in author's college time.

1. はじめに

著者の学生時代を思い出すに、マイクロ波の講義は難解で、諸現象の物理的イメージすら湧かずじまいであった。ただいたずらに暗記に頼り、何とか単位は取得したものの、いざ就職してマイクロ波を取り扱おうとした時、「付け焼刃は剥がれ易い」ことを実感し、今一度原点に立ち返り、学び直したいということを痛感した。本講座は、著者が現工業高専生に対して、自らと同じ経験がなきよう、「高専レベルの学力でマイクロ波伝送理論の本質をマスターすること」を目標として行っている講義をもとに取りまとめたものであり、伝送線路における物理現象からスタートし、伝送線路の基本式、伝送回路の考察を踏まえて、スミスチャートとS行列の活用法を学ぶ。また伝送回路の整合理論を理解することにより本講義を完結する。

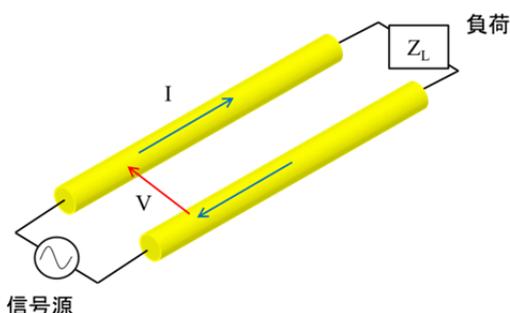


図1 信号源と負荷が接続された任意の伝送線路

2. 伝送線路

一般に伝送線路は、特に低い周波数では図1に示すように断面形状が一樣な導体系で構成される。信号源によりこの伝送線路に給電された伝送電力は、伝送線路の終端に接続された負荷で一部は消費され、一部は反射させられる。またこの電力は伝送線路を進行しつつ減衰する。本章ではまず伝送波がこの伝送線路を伝送する際に生じる物理現象を説明し、伝送理論を概説する。なお時には伝送波が伝送線路から離れて自由空間に放射する場合もありうるが、この現象[1]は本講座の論点ではないので、割愛する。

2.1 伝送線路における物理現象

本節では、図1のように平行な2本の導線で構成された伝送線路を例とし、この伝送線路を交流信号で給電した場合に、導線自身、及び導線間にどのような物理現象が生じるかを示す。

(a) 分布インダクタンス

図2のような導線に電流Iが流れた場合、導線にはアンペアの周回積分則

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} = I \quad (1)$$

に従った磁界強度Hが発生する。ここでCは導線を囲むように仮定した線積分路であり、これに直交するような面dSを仮定すると、この面を貫く磁束密度Bは媒質の透磁率を μ として、

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

である。この磁束密度を面全体で積分すると、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

なる磁束 Φ が求まる。この磁束は導線を通る電流に比例し、その比例係数が

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (4)$$

なるインダクタンス L で定義した物理量なので、この現象を等価回路的に見た場合、導線には直列に L なるインダクタンスが分布しているとみなせる。

このインダクタンスは一般に単位長さあたり数nH程度であり、例えばこれを10nH/mと仮定すると、商用周波数である60Hzと無線LANなどで利用される周波数の2.4GHzでは、そのリアクタンスは表1のようになる。この表で一目瞭然であるが、直流に近い60Hzではリアクタンスは 0Ω に近く、インダクタンスは無視し、直流回路のアナロジーで回路計算ができるが、高周波ではリアクタンスは 0Ω からかけ離れて高い値になり、無視するわけにはいかないことが容易に理解できる。

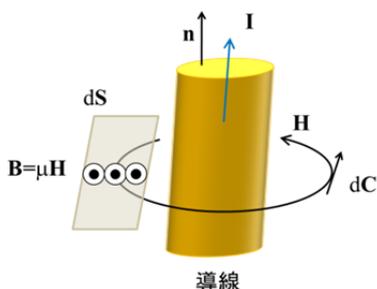


図2 電流 I が流れる導線に発生する磁界

表1 各周波数帯における導線のリアクタンス

周波数	リアクタンス ωL
60Hz	$3.77 \cdot 10^{-6} \Omega$
2.4GHz	150Ω

(b) 分布容量

次に導線間に着目すると、電圧 V が印加されていることから電気力線が、図3のように一方の導体から他方の導体へと分布している。ここで電圧は、2導体間の電界 \mathbf{E} を線積分路 C に沿って、

$$V = -\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{C} \quad (5)$$

と積分したものであるが、この電界はもともと両導体に分布する $Q[C]$ の電荷から発生している。この電荷は導線間の電圧に比例し、その比例係数が

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6)$$

なる静電容量で定義した物理量なので、この現象を

等価回路的に見た場合、導線間には並列に C なる静電容量が分布しているとみなせる。インダクタンスの時と同様、この静電容量は一般に数pF程度と小さく、低周波ではこの容量に起因するリアクタンスは極めて大きく、二導線間は開放とみなせるが、高周波になるに従いこのリアクタンスは小さくなり、導線間に静電エネルギーのやり取りが生じてくることから、この静電容量は無視できなくなる。

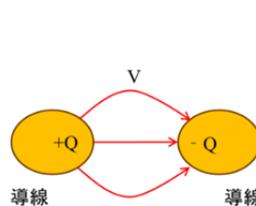


図3 二導線間に印加した電圧

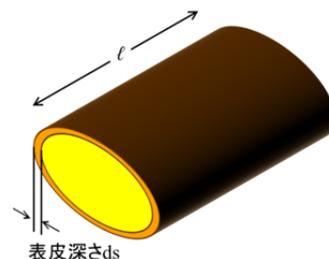


図4 導体内に流れる高周波電流

(c) 直列抵抗

一般に導線に流れる電流は、直流では導体断面に均一に分布するが、交流、特にその周波数が高くなると高周波電流は導線内部に発生するインダクタンスの影響により流れにくくなり、導線の表面に分布してくる。これを表皮効果と呼び、表面から ds の深さの高周波電流強度が、表面のその $1/e$ になった場合、この ds (この物理量を表皮深さという)は、導線の透磁率及び導電率をそれぞれ μ 、 σ_c 、また角周波数を ω として、

$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_c}} \quad (7)$$

で表される。上式は周波数が高くなるほど高周波電流は導線表面に集中してくることを意味している。一方、導線の抵抗 R は導線の長さおよび電流が流れる実効的な断面積をそれぞれ l 、 S として

$$R = \frac{l}{\sigma_c S} \quad (8)$$

なので、周波数が高くなるほど表皮効果により実効面積は小さくなり、結果として抵抗値は上昇するので無視できなくなる。これを等価回路的にみると、導線にはこの抵抗が直列に分布しているとみなせる。

(d) 漏れコンダクタンス

例外を除き伝送線路の断面形状は、次節で説明するように至る所で同一にする必要がある。そのためには二導線間を図5のように誘電体で支持するが、この誘電体には若干の導電率 σ_d が存在している。従

って二導線間に電位差があることから、この導電率により電流が流れるようになる。これを漏れ電流と呼び、この電流による損失が高周波になるほど無視できなくなる。これを等価回路的にみると、二導線にはこの抵抗が並列に分布しているとみなせる。

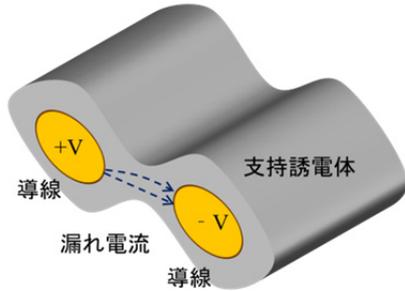


図5 2 導体を支持する被覆誘電体内に流れる漏れ電流

2.2 伝送方程式と線路定数

(a) 伝送線路の基本式

図6 上側のような伝送線路を考察する。信号源を左端に設置し、伝送方向座標系の原点を信号源にとる。この伝送線路を等価回路で表現するために、前節の考察より、

- ✓ L [H/m]; 単位長あたりの分布インダクタンス
- ✓ C [F/m]; 単位長あたりの分布容量
- ✓ R [Ω /m]; 単位長あたりの直列抵抗
- ✓ G [S/m]; 単位長あたりの漏れコンダクタンス

なる物理量を導入すると、図中距離 z の点における微小区間 Δz は同図下側のように表される。

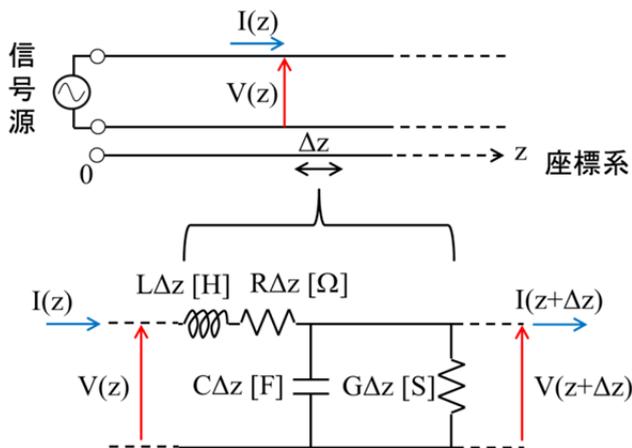


図6 伝送線路における微小区間中の電圧と電流

界は定常的に $e^{j\omega t}$ で変化していると仮定し、この

Δz 区間にキルヒホッフ則を適用すると、

$$V(z) - V(z + \Delta z) = R\Delta z I(z) + j\omega L\Delta z I(z) \quad (9.a)$$

$$I(z) - I(z + \Delta z) = G\Delta z V(z + \Delta z) + j\omega C\Delta z V(z + \Delta z) \quad (9.b)$$

ここで

$$V(z + \Delta z) - V(z) = \Delta V(z) \quad (10.a)$$

$$I(z + \Delta z) - I(z) = \Delta I(z) \quad (10.b)$$

を式(9)に代入し、高次の微小量を無視すると、

$$\frac{\Delta V(z)}{\Delta z} = -(R + j\omega L)I(z) \quad (11.a)$$

$$\frac{\Delta I(z)}{\Delta z} = -(G + j\omega C)V(z) \quad (11.b)$$

を得る。従って Δz を無限小に収束させると、

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\zeta I(z) \quad (12.a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\eta V(z) \quad (12.b)$$

但し

$$\zeta = R + j\omega L \quad [\Omega/m] \quad (13.a)$$

$$\eta = G + j\omega C \quad [S/m] \quad (13.b)$$

であり、この ζ および η を伝送線路の直列インピーダンスおよび並列アドミタンスという。式(12)は伝送線路の定常交流界を与える基本式であり、電信方程式などとよばれる。また R, L, G, C, ζ, η を線路の一次定数という。

なお本論では伝送理論の理解を容易にするため、以下では無損失($R=G=0$)として議論を進める。損失がある場合の考察は文献[1][2]などを参照されたい。

(b) 定常交流解

式(12.a)を z で微分し、かつ電流の項に式(12.b)を代入して、電圧だけの式に変形すると、

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \omega^2 LCV(z) = 0 \quad (14)$$

なる二階の定係数同次微分方程式が得られる。この解法は高専低学年および大学教養課程で学ぶ内容であり、一般解は容易に

$$V(z) = V_i e^{-j\beta z} + V_r e^{j\beta z} \quad (15.a)$$

と解ける。また上式を式(12.a)に代入して電流は

$$I(z) = \frac{1}{\zeta_0} (V_i e^{-j\beta z} - V_r e^{j\beta z}) \quad (15.b)$$

と求まる。ここで V_i, V_r は積分定数、また ζ_0 と β は

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (16.a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (16.b)$$

である。

この ζ_0 は線路の断面形状で決定される固有の値であることから[1]、これを特性インピーダンス、また β は電圧や電流の単位長さあたりの位相変化量を表すことからこれを位相定数とそれぞれ呼ぶ。これらは線路の一次定数であるLとCで与えられることから、線路の二次定数と呼ぶ。

次に、式(15)の物理的意味を考察する。まず式(15.a)の第1項に着目し、時間変化 $e^{j\omega t}$ を陽に表すと、

$$V_1(z) = V_i e^{-j\beta z} e^{j\omega t} = V_i e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (17)$$

この式はフェーザ表示なので、実際にはその実部、あるいは虚部をとれば、観測量が評価できる。ここでは実部をとると、

$$\begin{aligned} R_e\{V_1(z)\} &= R_e\{V_i \cos(\omega t - \beta z) + jV_i \sin(\omega t - \beta z)\} \quad (18) \\ &= V_i \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

この波形を、時間 t を固定し、位置 z を変化させて観測すると、図7の実線のようになる。この波形の山から山までの長さ λ は波長と呼ばれ、

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (19)$$

である。

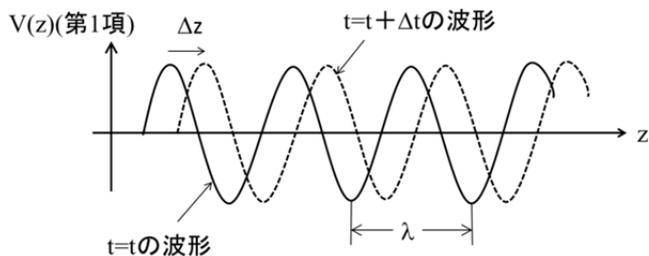


図7 式(15)第1項の伝送の様子

この波形の山の位置では、 $\cos(\omega t - \beta z) = 1$ すなわち

$$\omega t - \beta z = 0 \quad (20)$$

を満足する。

次に時間 $t=t+\Delta t$ で山の位置が $z=z+\Delta z$ だけ移動したとすると、山の位置は $\cos\{\omega(t+\Delta t)-\beta(z+\Delta z)\}=1$ を満足するので、

$$\omega(t + \Delta t) - \beta(z + \Delta z) = 0 \quad (21)$$

であり、この式に式(20)を代入すると、

$$\Delta z = \frac{\omega}{\beta} \Delta t \quad (22)$$

となる。ここで $\omega > 0$ 、 $\beta > 0$ 、 $\Delta t > 0$ ゆえ、 $\Delta z > 0$ 。従って時間がたつにつれて、式(15)の第1項は z の正の方向に進む波動であることがわかる。同様の考察を行え

ば、式(15)の第2項は z の負の方向に進む波動である。

以上をまとめると、伝送線路上を伝送する電圧や電流の一般式において、第1項は電源から負荷へ、第2項は負荷から電源へ進む波動を示し、前者を入射波、後者を反射波と呼ぶ。なお式(22)で $\Delta t \rightarrow 0$ とおくと、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (23)$$

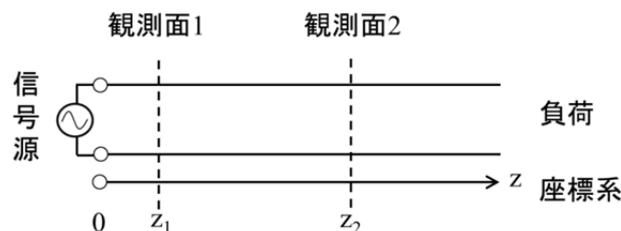
であり、これは波動の位相が進む速度、すなわち位相速度を表す。

なお図7は時間を固定してみた観測波形であり、実際に界は時々刻々変化しているの、入射波あるいは反射波は、伝送線路上で一定の値である $|V_i|$ あるいは $|V_r|$ (正弦波形の山と谷の包絡線)として観測される。

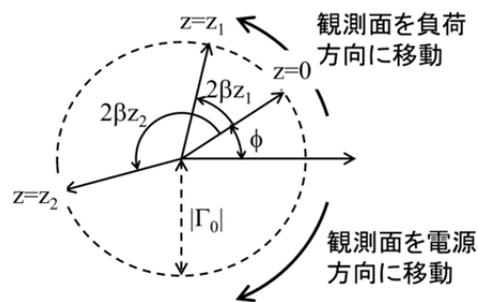
3. 伝送回路

3.1 反射係数と入力インピーダンス

(a) 反射係数



(a) 伝送線路上の観測面



(b) 反射係数ベクトル図

図8 伝送線路上の反射係数の変化

伝送回路の設計は、極論すると式(15)における第2項、すなわち反射波を如何に抑えるかに尽きる。そのためには、伝送回路にどのくらい反射波が存在するかを知る必要があり、かかる目的から以下の定義からなる反射係数 $\Gamma(z)$ を導入する。

$$\Gamma(z) = \frac{\text{反射波の電圧}}{\text{入射波の電圧}} = \frac{V_r}{V_i} e^{j2\beta z} \quad (24)$$

ここで $z=0$ における反射係数を

$$\Gamma_0 = \frac{V_r}{V_i} = |\Gamma_0| e^{j\phi} \quad \text{但し } \phi = \angle \left(\frac{V_r}{V_i} \right) \quad (25)$$

とおくと、

$$\Gamma(z) = |\Gamma_0| e^{j(2\beta z + \phi)} \quad (26)$$

になる。

これより反射係数 $\Gamma(z)$ の絶対値は線路の至る所で一定値 $|\Gamma_0|$ をとる。(これは無損失の場合であって、損失がある場合はこの限りではない。) また反射係数の位相角 $\Gamma=2\beta z + \phi$ は z の関数である。

図 8(a) に示す伝送線路上の z_1 および z_2 の位置における反射係数をベクトル図で示すと、図 8(b) のようになる。ここで ϕ は信号源 ($z=0$) における初期位相角であり、観測面 $z=z_1$ での反射係数は、半径 $|\Gamma_0|$ のベクトルをこの位置から位相角 $2\beta z_1$ だけ負荷側(反時計方向)に回転した点になる。同様に観測面 $z=z_2$ での反射係数は原点から角度 $2\beta z_2 + \phi$ 回転させた点である。

(b) 入力インピーダンス

伝送線路上 z の点の電圧と電流の比を、伝送線路上 z の点から負荷側を見込んだ入力インピーダンス ζ_{in} という。式(15)より、

$$\zeta_{in} = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_i e^{-j\beta z} + V_r e^{j\beta z}}{V_i e^{-j\beta z} - V_r e^{j\beta z}} \zeta_0 \quad (27)$$

であり、上式の分子分母を $V_i e^{-j\beta z}$ で割り、式(26)を代入すると、

$$\frac{\zeta_{in}}{\zeta_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad \text{或いは、} \quad \Gamma(z) = \frac{\zeta_{in} - \zeta_0}{\zeta_{in} + \zeta_0} \quad (28)$$

を得る。この式は伝送線路上の反射係数と入力インピーダンスが一対一対応していることを示し、スミスチャートの基礎となるほか、伝送回路設計に多用される重要な式である。

(c) 定在波

式(15)のように入射波と反射波が共存する場合、その合成波形はどのようなようになるかを考察する。式(15.a)をその第1項でくくり、絶対値をとると、

$$|V(z)| = |V_i| \left| 1 + |\Gamma_0| e^{j(2\beta z + \phi)} \right| \quad (29)$$

この式は、図 9(a) のように大きさ 1 のベクトルに半径 $|\Gamma_0|$ の円が加わったものであり、 z の関数としてこの合成ベクトルを同図の第1象限に投影すると、山と谷が周期的に表れ、 $\lambda/2$ の周期で変調を受けた波形になる。これを定在波と呼ぶ。ここで反射係数が 0 の場合は同図(b)のように、伝送線路の至る所で電圧の値は一定と理想的な状態となる。これを整合という。また反射係数が 1、すなわち完全反射の場合は同図(c)

のように定在波の山と谷の差は最も大きくなり、かつ谷のレベルが完全に零になる。

このように反射係数の大きさにより、定在波の山と谷の値が異なり、この度合いを表す物理量として、以下のような定在波比 ρ が定義される。

$$\rho = \frac{\text{電圧最大値}}{\text{電圧最少値}} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \quad (30)$$

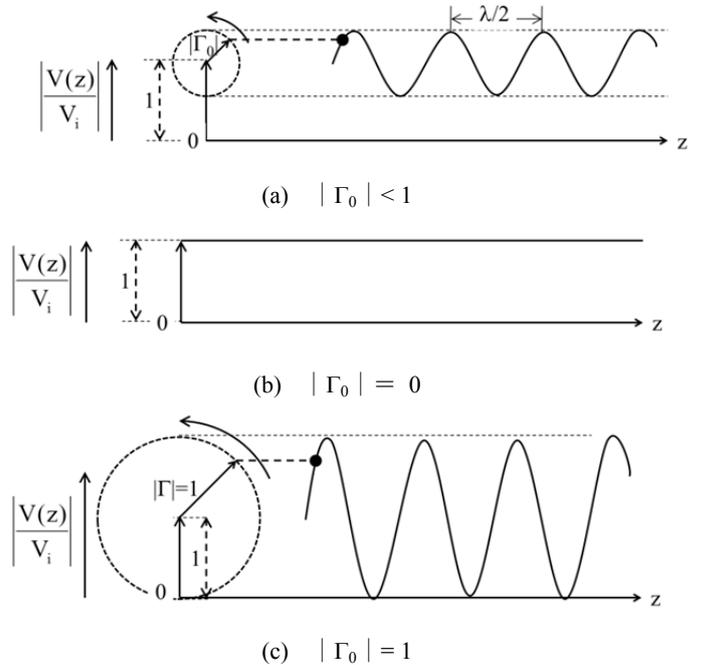


図 9 各反射係数に対する伝送線路上の規格化電圧分布

以上定在波の振る舞いをまとめると、以下のとおりである。

- ✓ 定在波の山(谷)は半波長ごとに周期的に表れる。
- ✓ 電圧定在波の山(谷)の位置では電流定在波は谷(山)になる。
- ✓ 反射係数が 0(1)の場合、定在波比は 1(∞)になる。

3.2 負荷で終端した伝送線路

(a) 伝送線路の F 行列表示

図 10(a) のように長さ l 、特性インピーダンスおよび位相定数 ζ_0 、 β の伝送線路において、入出力端の電圧と電流を図のようにとると、 $z=0$ では

$$V(0) = V_1 = V_i + V_r \quad (31.a)$$

$$I(0) = I_1 = \frac{1}{\zeta_0} (V_i - V_r) \quad (31.b)$$

一方 $z=l$ では

$$V(\ell) = V_2 = V_i e^{-j\beta\ell} + V_r e^{j\beta\ell} \quad (32.a)$$

$$I(\ell) = I_2 = \frac{1}{\zeta_0} (V_i e^{-j\beta\ell} - V_r e^{j\beta\ell}) \quad (32.b)$$

上式より V_r , V_i を消去し、 V_1 , V_2 , I_1 , I_2 についてまとめると、

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta\ell & j\zeta_0 \sin \beta\ell \\ j \frac{\sin \beta\ell}{\zeta_0} & \cos \beta\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

を得る。上式は図 10(a) に示した伝送線を F 行列に等価変換したものである。この式を用いれば伝送線路を設計に必要な回路に変換できる[2]。一例として伝送線路を T 型回路に等価変換すると図 10(b) のようになる。

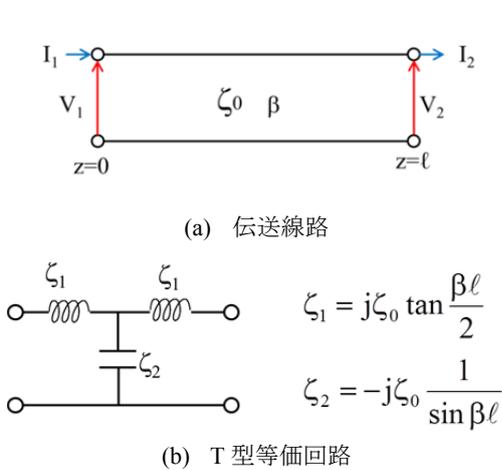


図 10 長さ ℓ 、特性インピーダンス ζ_0 の伝送線路

(b) 負荷終端伝送線路の入力インピーダンス

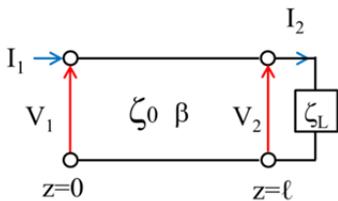


図 11 任意の負荷で終端された伝送線路

式(33)をもとに、図 11 のように終端にインピーダンス ζ_L の負荷を接続した伝送線路において、負荷から長さ ℓ だけ電源側に移動した点の入力インピーダンスを導出すると、

$$\zeta_{in} = \frac{\zeta_L + j\zeta_0 \tan \beta\ell}{\zeta_0 + j\zeta_L \tan \beta\ell} \zeta_0 \quad (34)$$

になる。これより伝送線路上の入力インピーダンスは周期的に変化することがわかる。そこでこの式をもとに、以下では負荷として短絡、開放などを仮定した場合の入力インピーダンスを調べる。

短絡負荷

終端を短絡した場合の入力インピーダンスは式(34)で ζ_L を零とおき、以下のように純リアクタンスで与えられる。

$$\zeta_{in} = j\zeta_0 \tan \beta\ell \quad (35)$$

これをもとに計算した伝送線路上の入力インピーダンスの変化を図 12 に示すが、その値は負荷端から離れるに従って、四分の一波長ごとに誘導性と容量性を周期的に繰り返すという興味ある性質を持つ。

また負荷端の反射係数は式(28)より、

$$\Gamma(z) = \frac{0 - \zeta_0}{0 + \zeta_0} = -1 = 1e^{j\pi}$$

であり、絶対値は 1、位相角は π になる。

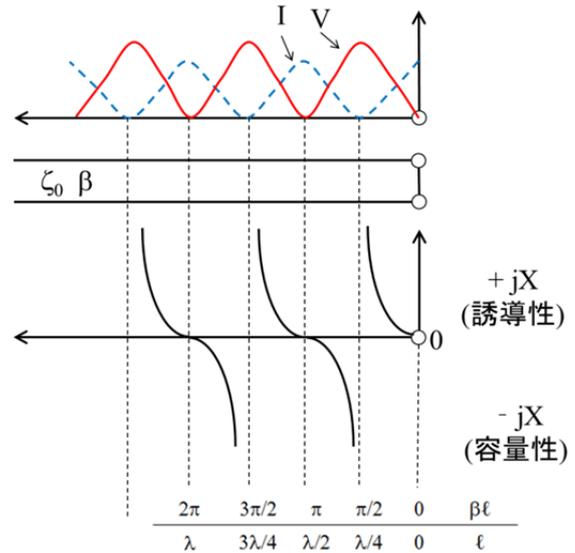


図 12 終端短絡伝送線路上の電圧・電流とインピーダンス

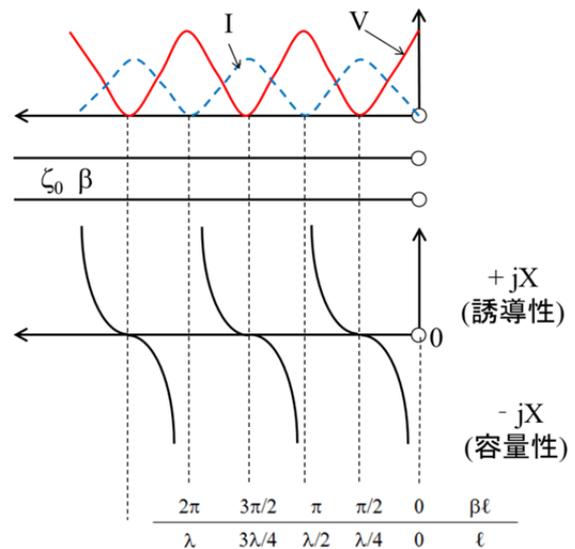


図 13 終端開放伝送線路上の電圧・電流とインピーダンス

開放負荷

終端を開放した入力インピーダンスも ζ_L を ∞ とおき、同様に計算すると、以下のような純リアクタンスで与えられる。

$$\zeta_{in} = -j\zeta_0 \cot \beta \ell \quad (36)$$

図13はこの場合の伝送線路上の入力インピーダンス変化であり、その値は四分の一波長ごとに容量性と誘導性を周期的に繰り返す。また負荷端の反射係数は、以下のように絶対値は1、位相角は0である。

$$\Gamma(z) = \frac{\infty - \zeta_0}{\infty + \zeta_0} = 1 = 1e^{j0}$$

整合負荷

負荷端に伝送線路の特性インピーダンス ζ_0 と等しいインピーダンスを接続した場合、反射係数は式(28)より0、すなわち整合状態になり、この場合伝送線路上の至る所入力インピーダンスは ζ_0 と理想的な状態になる。

ここで注意すべき点は、特性インピーダンスは式(16.a)で示されるように伝送路の断面形状で決定されるので、断面形状が製作誤差などにより部分的に異なると、反射波が発生して整合状態が崩れてしまう。従って伝送線路の断面形状は至る所で同一にする必要がある。

$\lambda/4$ 線路

負荷端から四分の一波長離れた点のインピーダンスは、式(34)から

$$\zeta_{in} = \frac{\zeta_0^2}{\zeta_L} \quad (37)$$

と、負荷インピーダンスの逆数に比例した値になる。このことは、負荷にコンデンサを(コイルを)接続した場合、四分の一波長離れた点では負荷がコイルと(コンデンサと)みなせるようになる。これをインバータと呼び、後述する整合回路やフィルタの設計などに多用される[3]。

(c) 伝送線路を用いたリアクタンス素子の構成法

式(35)、(36)によれば、終端を短絡あるいは開放した伝送線路は特定の周波数ではコイルあるいはコンデンサと等価な働きをすることがわかる。この点に着目すると、長さを四分の一波長以下に設定した伝送線路では、図14(a)、(b)のように短絡終端はコイルに、開放終端はコンデンサに等価変換できる。

ところでこの2種の等価変換は伝送線路に並列に素子を付加したい場合のみに利用でき、直列素子には応用できない。しかし伝送線路の特性インピーダンスが高く($\zeta_0 \gg 1$)かつ電気角 $\beta\ell$ が1より極めて小さ

い($\beta\ell \ll 1$)場合、図10(b)のT型等価回路素子は

$$\zeta_1 \rightarrow j\zeta_0 \frac{\beta\ell}{2}, \quad \zeta_2 \rightarrow \infty$$

なので、伝送線路は図14(c)のように近似的に直列のインダクタンスとみなすことができる。

なお、これらの変換は、所定の周波数近傍でのみ等価変換できることに注意されたい。

回路構成	等価変換式
<p>(a) 伝送線路と並列インダクタンス</p>	$L = \frac{\zeta_0}{\omega} \tan \beta \ell$
<p>(b) 伝送線路と並列容量</p>	$C = \frac{1}{\omega \zeta_0} \tan \beta \ell$
<p>(c) 微小高インピーダンス線路と直列インダクタンス</p>	$L \cong \frac{\zeta_0}{\omega} \beta \ell$

図14 伝送線路と集中定数素子の等価変換

(d) 黒田変換の利用

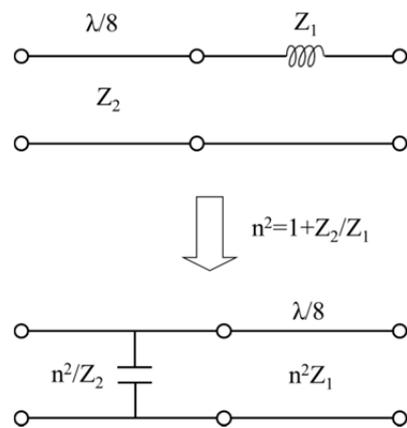


図15 黒田変換の一例

コンデンサやコイルの使用周波数は、チップ型素子の開発と相まって高周波化してきたが、周波数帯域に関しては、コイルはコンデンサと比べて狭く、利用しづらい。そこでコイルをコンデンサに置き換える等価変換として、黒田変換が有用になる[4]。図15はその一例を示したもので、直列インダクタンスは黒田変換により並列コイルに等価変換できる。

なお回路設計上実現しにくい特性インピーダンス

を必要とする場合も、この変換を利用すると、そのような特性インピーダンスを実現しやすい値に変換できる場合がある。

4. スミスチャート

4.1 反射係数円線図

反射係数ベクトルは図 8(b)に示したとおりであり、改めて反射係数を複素平面($\Gamma = u + jv$)に示したものが図 16 である。この線図は以下のように規定される。

- ✓ $\Gamma(z)$ は半径 $|\Gamma_0|$ の円で表される。
- ✓ $\Gamma(z)$ の観測面を負荷(電源)方向に移動させると、 $\Gamma(z)$ の位相は増加(減少)し、ベクトルは反時計(時計)方向に回転する。
- ✓ $|\Gamma_0|$ は0~1の値をとり、 $|\Gamma_0|=0$ が円の中心、 $|\Gamma_0|=1$ が最外円周を表す。
- ✓ 反射係数の位相角は u の正軸上を 0° とする。
- ✓ 反射係数の位相角は $\Gamma = 2\beta z + \phi$ なので、反射係数の観測面は、半波長 $\lambda/2$ の長さ移動すると、線図上の元の位置に戻る。

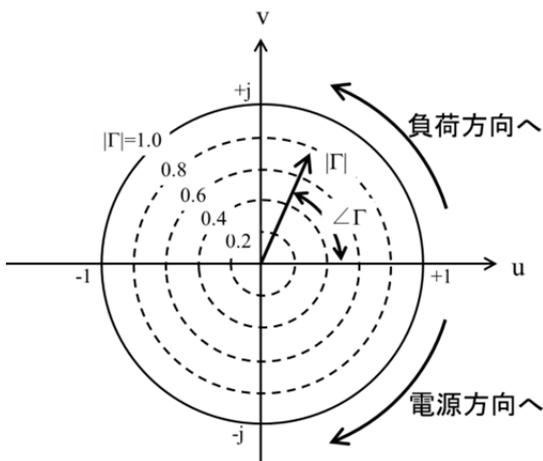
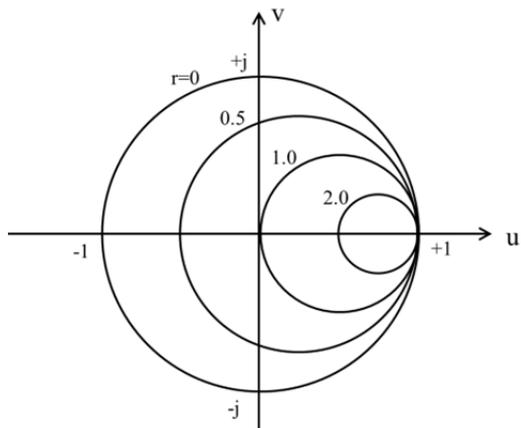
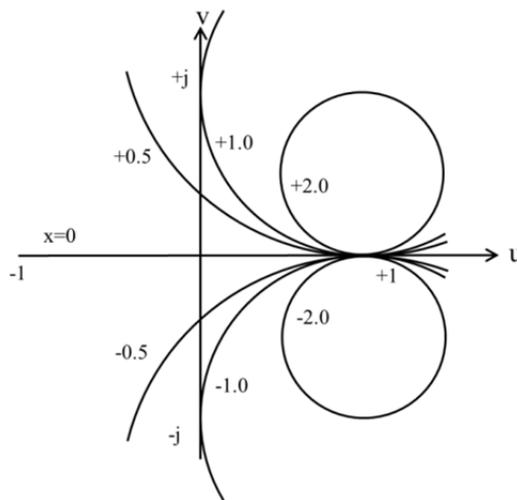


図 16 反射係数円線図



(a) 等抵抗線図



(b) 等リアクタンス線図

図 17 インピーダンス線図

4.2 インピーダンス円線図

伝送線路上の任意の位置 z における入力インピーダンス ζ_{in} を実部 R と虚部 X に分け、これを線路の特性インピーダンス ζ_0 で規格化し、

$$\hat{\zeta} = \frac{\zeta_{in}}{\zeta_0} = \frac{R + jX}{\zeta_0} = r + jx \quad (38)$$

で表す。規格化入力インピーダンスと反射係数の関係は式(28)で示されたように一対一対応し、

$$\Gamma = u + jv = \frac{\hat{\zeta} - 1}{\hat{\zeta} + 1} = \frac{r - 1 + jx}{r + 1 + jx} \quad (39)$$

なので、上式両辺を実部と虚部に分ける、

$$\text{実部: } (u - 1)r - vx = -(u + 1)$$

$$\text{虚部: } vr + (u - 1)x = -v$$

なる r と x に関する連立方程式になる。これを解くと、

$$r = \frac{-u^2 + 1 - v^2}{(u - 1)^2 + v^2}, \quad x = \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2}$$

を得る。これらの式を図 16 に示した反射係数円線図に描くため u と v に関してまとめると、規格化抵抗 r および規格化リアクタンス x のみで表現された、以下のような円の式になる。

$$\left(u - \frac{r}{r+1} \right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{r+1} \right)^2 \quad (40.a)$$

$$\left(u - 1 \right)^2 + \left(v - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (40.b)$$

式(40.a)は反射係数円線図上において、

$$\text{半径 } \frac{1}{r+1}, \text{ 中心 } \left(\frac{r}{r+1}, 0 \right),$$

また式(40.b)は

$$\text{半径 } \frac{1}{|x|}, \text{ 中心 } \left(1, \frac{1}{x} \right),$$

の円で表される。

この結果をもとに、反射係数円線図上に r をパラメータとして式(40.a)をプロットすると、図 17(a)のような等抵抗円になる。この円は、 $r=0$ では反射係数円線図における最外周に等しく、 $r=\infty$ では $u=1$ の点に収束する。また r のいかなる値でも等抵抗円は $u=1$ の点を通ることが特徴的である。

次に反射係数円線図上に、正および負からなる x の値をパラメータとして式(40.b)をプロットすると、図 17(b)のような等リアクタンス円になる。ここで円の中心は $u=1$ における v 軸上にあり、等リアクタンス円は、 $x=0$ では u 軸に等しく、 $x=\pm\infty$ では $u=1$ の点に収束する。また等リアクタンス円は、リアクタンスが正の場合は v 軸の正の領域に、負の場合は v 軸の負の領域に存在することが特徴的である。

4.3 スミスインピーダンス図表

図 17 に示した等抵抗円と等リアクタンス円を反射円線図上に同時に描くと、図 18 のようになる。これをスミスチャートと呼ぶ。

この図表を用いると、次節で述べるように、式(39)で示された、伝送線路上における反射係数と入力インピーダンスの対応が直感的に理解でき、回路の整合や伝送線路上における電圧、電流分布を把握することができ、大変便利である。

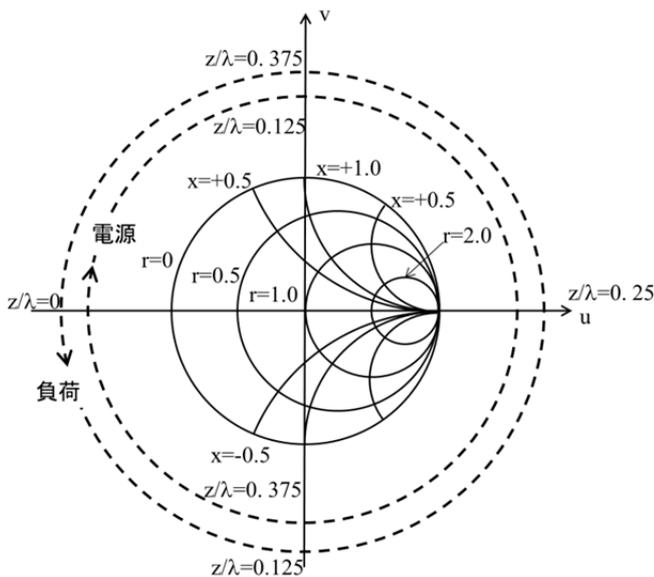


図 18 スミスインピーダンス線図

4.4 スミスインピーダンス図表の性質

(a) 電圧最大・最小点

伝送線路上の電圧・電流を反射係数を用いて表すと、式(15)、(26)より、

$$V(z) = V_i e^{-j\beta z} \{1 + |\Gamma_0| e^{j(2\beta z + \phi)}\} \quad (41.a)$$

$$I(z) = \frac{V_i}{\zeta_0} e^{-j\beta z} \{1 - |\Gamma_0| e^{j(2\beta z + \phi)}\} \quad (41.b)$$

である。上式で電圧最大点は $2\beta z + \phi = 0$ の時であることから、

$$V_{\max} = V_i e^{-j\beta z} \{1 + |\Gamma_0|\} \quad (42.a)$$

$$I_{\min} = \frac{V_i}{\zeta_0} e^{-j\beta z} \{1 - |\Gamma_0|\} \quad (42.b)$$

これより電圧最大点の規格化入力インピーダンスは

$$\hat{\zeta}_{\max} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} = r_{\max} > 1 \quad (43)$$

と、1 以上でかつ純実数になる。これより電圧最大点では、そのインピーダンスはスミスチャートにおける u の正軸上に位置する。

また上式は、たまたまであるが式(30)に一致することから、電圧最大点における規格化インピーダンス値(規格化抵抗値)は

$$\hat{\zeta}_{\max} = r_{\max} = \rho \quad (44)$$

と、定在波比に等しくなるという興味ある性質を有する。

同様の考察を電圧最小点で行うと、 $2\beta z + \phi = \pi$ として

$$V_{\min} = V_i e^{-j\beta z} \{1 - |\Gamma_0|\} \quad (45.a)$$

$$I_{\max} = \frac{V_i}{\zeta_0} e^{-j\beta z} \{1 + |\Gamma_0|\} \quad (45.b)$$

これより電圧最小点の規格化入力インピーダンスは

$$\hat{\zeta}_{\min} = \frac{1 - |\Gamma_0|}{1 + |\Gamma_0|} = r_{\min} < 1 \quad (46)$$

と、1 以下でかつ純実数になる。これより電圧が最小の時、そのインピーダンスはスミスチャートにおける u の負軸上に位置する。電圧最小点における規格化インピーダンス値(規格化抵抗値)は

$$\hat{\zeta}_{\max} = r_{\min} = \frac{1}{\rho} \quad (47)$$

と、定在波比の逆数に等しくなる。

(b) 反射係数の位相角

反射係数の位相角 $\angle \Gamma$ は式(26)より

$$\angle \Gamma = 2\beta z + \phi = 4\pi \frac{z}{\lambda} + \phi \quad (48)$$

従って反射係数の位相角は、伝送波長で規格化した観測面の移動距離に 4π を掛け、かつ初期位相 ϕ を加えた値なので、スミスチャートの外周には規格化距離 z/λ がプロットされる。3章で述べたように、反射係数円線図において観測面は半波長移動すると元の位置に戻ることから、 z/λ は1周で0.5になる。

なお回路設計上、観測面は負荷側あるいは電源側に移動させて考察することが多々あることから、スミスチャートの外周には負の u 軸からスタートし、負荷方向および電源方向に z/λ が目盛られている。

(c) スミスアドミタンス図表

規格化コンダクタンスおよびサセプタンスをそれぞれ g 、 b とおき、規格化アドミタンスを

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\hat{\zeta}} = \frac{1}{r + jx} = g + jb \quad (49)$$

とすると、反射係数は

$$\Gamma = \frac{\hat{\zeta} - 1}{\hat{\zeta} + 1} = \frac{1 - 1/\hat{\eta}}{1 + 1/\hat{\eta}} = -\frac{\hat{\eta} - 1}{\hat{\eta} + 1}$$

より

$$\frac{\hat{\eta} - 1}{\hat{\eta} + 1} = -\Gamma = \Gamma e^{j\pi} \quad (50)$$

になる。上式と式(39)を比較すると、アドミタンスはスミスインピーダンス図表でインピーダンスの点を同心円上に位相角 $\pi(z/\lambda=0.25)$ だけ回転させた点(点対称な点)に相当する。従って、この点の規格化抵抗の値を規格化コンダクタンスに、また規格化リアクタンスの値を規格化サセプタンスに読み替えばよい。

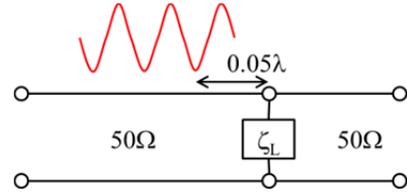
4.5 スミスチャートを用いた基本的な問題

問 1 特性インピーダンス 50Ω の伝送線路を $100 + j50 \Omega$ の負荷で終端した。この伝送線路上の定在波比、反射係数、負荷端の電圧定在波分布の概略を求めよ。ただし周波数は 30GHz とし、また伝送線路の実効比誘電率は 1 とせよ。

問 2 特性インピーダンス 75Ω の伝送線路をある負荷で終端した。この伝送線路上の定在波比は 2.5 、また負荷から電圧定在波の谷までの距離は 0.2 波長であったとする。この負荷のインピーダンスを求めよ。

問 3 下図のように特性インピーダンス 50Ω の伝送線路中に、ある負荷 ζ_L が並列に接続されている。この負荷から電源側に沿って電圧定在波を測定したところ定在波比は 5 、また負荷から 0.05

波長の点が電圧定在波の谷であった。この負荷のインピーダンスを求めよ。



問4 アンテナのインピーダンスを測定するため、まずアンテナ設置位置を短絡し、アンテナから十分離れた点で電圧定在波の谷の位置を確認した。その後アンテナを接続し、再度電圧定在波を測定したところ、定在波比は 1.2 、また電圧定在波の谷の位置は、短絡時と比べて 15cm だけ電源側に移動していた。周波数を 600MHz 、伝送線路の特性インピーダンスを 75Ω として、アンテナのインピーダンスを求めよ。

5. 散乱行列(S行列)

5.1 S行列の定義

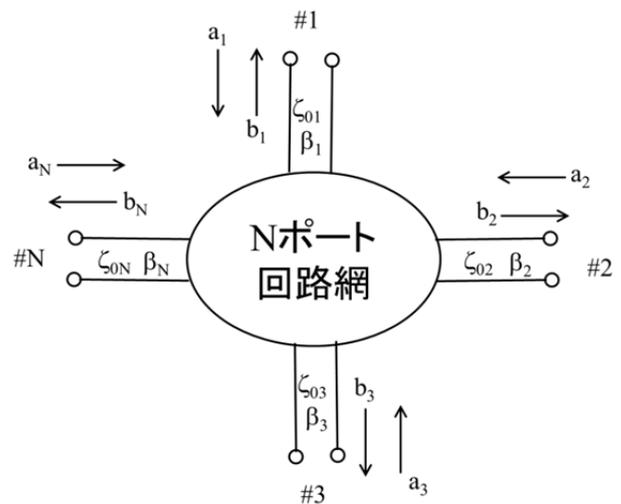


図 19 N ポート回路網

図 19 のように、ある回路網に特性インピーダンス ζ_{0k} 、位相定数 β_k の N 個 ($k=1 \sim N$) の伝送線路が接続されている場合を考察する。 k 番目のポートにおける伝送線路上の電圧と電流は、

$$V_k(z) = V_{ki} e^{-j\beta_k z} + V_{kr} e^{j\beta_k z} \quad (51.a)$$

$$I_k(z) = \frac{V_{ki}}{\zeta_{0k}} e^{-j\beta_k z} - \frac{V_{kr}}{\zeta_{0k}} e^{j\beta_k z} \quad (51.b)$$

上式より入射波および反射波の電力 P_{ki} 、 P_{kr} は、* を複素共役として、以下のように表される。

$$P_{ki} = \frac{1}{2} V_{ki} e^{-j\beta_k z} \left(\frac{V_{ki} e^{-j\beta_k z}}{\zeta_{0k}} \right)^* = \frac{|V_{ki}|^2}{2\zeta_{0k}} \quad (52.a)$$

$$P_{kr} = \frac{1}{2} V_{kr} e^{j\beta_k z} \left(\frac{V_{kr} e^{j\beta_k z}}{\zeta_{0k}} \right)^* = \frac{|V_{kr}|^2}{2\zeta_{0k}} \quad (52.b)$$

ここで k ポートにおいて、ある観測面を仮定し、

a_k ; k ポートの観測面における正規化入射波振幅
 b_k ; k ポートの観測面における正規化反射波振幅

なる物理量を導入して、入射電力と反射電力が

$$P_{ki} = \frac{|V_{ki}|^2}{2\zeta_{0k}} = \frac{1}{2} a_k a_k^* = \frac{1}{2} |a_k|^2 \quad (53.a)$$

$$P_{kr} = \frac{|V_{kr}|^2}{2\zeta_{0k}} = \frac{1}{2} b_k b_k^* = \frac{1}{2} |b_k|^2 \quad (53.b)$$

になるよう正規化すれば、各振幅は

$$a_k = \frac{V_{ki}}{\sqrt{\zeta_{0k}}} e^{-j\beta_k z} \quad (54.a)$$

$$b_k = \frac{V_{kr}}{\sqrt{\zeta_{0k}}} e^{j\beta_k z} \quad (54.b)$$

と書くことができる。

これを式(51)に代入すると、 k ポート観測面における電圧と電流は、各正規化振幅により

$$V_k(z) = \sqrt{\zeta_{0k}} (a_k + b_k) \quad (55.a)$$

$$I_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{0k}}} (a_k - b_k) \quad (55.b)$$

或いは各正規化振幅を電圧・電流で表すと、

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_{0k}}} V_k(z) + \sqrt{\zeta_{0k}} I_k(z) \right) \quad (56.a)$$

$$b_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_{0k}}} V_k(z) - \sqrt{\zeta_{0k}} I_k(z) \right) \quad (56.b)$$

になる。ここで、 k ポートと $k+1$ ポートを考察すると、各ポート間の電圧と電流は Z 行列や Y 行列で表されるように線形であることから[2]、正規化振幅の a_k と b_k も式(56)より線形であり、これらは

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}][\mathbf{a}] \quad (57)$$

と表してもよい。ただし、

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (58.a)$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \quad (58.b)$$

であり、上式の $[\mathbf{S}]$ を散乱行列(Scattering Matrix)、あるいは \mathbf{S} 行列と呼ぶ。

5.2 \mathbf{S} 行列の性質

(a) \mathbf{S} 行列の物理的意味

図 19 に示す N ポート回路で、 i ポート以外のポートはすべて整合されているとすると、

$$a_k = 0, \quad (k \neq i)$$

なので、これを式(57)に代入すると、

$$b_i = S_{ii} a_i, \quad b_j = S_{ji} a_i$$

である。これより、 S_{ii} 、 S_{ji} に関して、以下のような物理的意味が得られる。

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_j=0(i \neq j)} \quad ; \quad \begin{array}{l} i \text{ ポート以外のポートをすべて} \\ \text{整合させたときの } i \text{ ポートの反} \\ \text{射係数} \end{array}$$

$$S_{ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_j=0(i \neq j)} \quad ; \quad \begin{array}{l} i \text{ ポート以外のポートをすべて} \\ \text{整合させたときの } i \text{ ポートから } j \\ \text{ポートへの透過係数} \end{array}$$

(b) 可逆性

図 19 の回路網に非可逆素子が含まれない限り、 \mathbf{S} 行列は以下の可逆性を示す。

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (59)$$

(c) ユニタリ性(エネルギー保存則)

無損失回路では入射電力と反射電力は等しいので、

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (a_i a_i^* - b_i b_i^*) = 0 \quad (60)$$

これを行列表示すると、

$$[\mathbf{a}^*]^t [\mathbf{a}] - [\mathbf{b}^*]^t [\mathbf{b}] = 0$$

なので、式(57)に代入すると、

$$[\mathbf{a}^*]^t [\mathbf{a}] - [\mathbf{a}^*]^t [\mathbf{S}^*]^t [\mathbf{S}] [\mathbf{a}] = 0$$

となり、 $[\mathbf{I}]$ を単位行列として、 \mathbf{S} 行列に関する以下の関係が導かれる。

$$[\mathbf{S}^*]^t [\mathbf{S}] = [\mathbf{I}] \quad (61.a)$$

$$[\mathbf{S}^*]^t = [\mathbf{S}]^{-1} \quad (61.b)$$

これを \mathbf{S} 行列のユニタリ性という。

(d) 観測面の移動

伝送回路を解析や測定する時、観測面を移動したい場合が多々ある。そこで、図 20 のような N ポート回路網において、各ポートで #k から #k' (k=1~N) まで観測面を移動した場合の S 行列を求める。

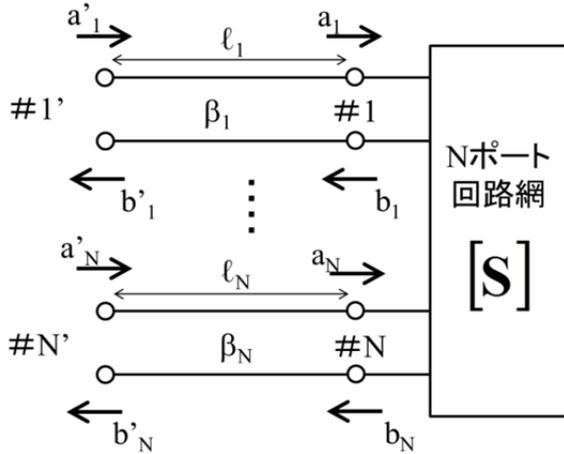


図 20 N ポート回路網における各ポートでの観測面の移動

観測面 #k における正規化入射・反射波振幅をそれぞれ $[a]$ 、 $[b]$ 、またこの観測面から見た N ポート回路網の S 行列を $[S]$ とする。この観測面に長さ l_k 、位相定数 β_k の伝送線を接続し、観測面を #k' まで移動させた場合、それぞれの正規化入射・反射波振幅を $[a']$ 、 $[b']$ 、またこの移動した観測面から見た回路網の S 行列を $[S']$ とする。この場合、

$$[b] = [S][a] \quad (62.a)$$

$$[b'] = [S'][a'] \quad (62.b)$$

であり、伝送線の位相角 $\beta_k l_k$ をもとにした

$$[T] = \begin{bmatrix} e^{-j\beta_1 l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-j\beta_N l_N} \end{bmatrix} \quad (63)$$

なる行列を定義すると、

$$[a] = [T][a'] \quad (64.a)$$

$$[b'] = [T][b] \quad (64.b)$$

である。従って式(64.b)に式(62.a)を代入し、かつ式(64.a)を用いると、

$$[b'] = [T][b] = [T][S][a] = [T][S][T][a']$$

なので、上式と式(62.b)を比較すると、観測面を移動させた後の S 行列 $[S']$ は

$$[S'] = [T][S][T] \quad (65)$$

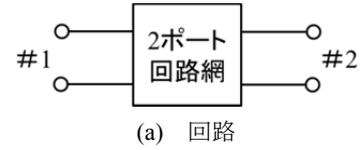
になる。

5.3 多ポート回路の S 行列

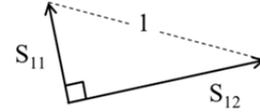
以下では無損失回路を仮定し、基本的な回路網の S

行列を調べる。

(a) 対称 2 ポート回路



(a) 回路



(b) S 行列要素のベクトル図

図 21 無損失対称 2 ポート回路

図 21(a)のように、2 ポート回路が対称かつ可逆な場合、S 行列要素は

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (66)$$

であり、これにユニタリ性を適用すると、

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ S_{11}^* S_{12} + S_{11} S_{12}^* = 0 \end{cases} \quad (67.a)$$

$$S_{11}^* S_{12} + S_{11} S_{12}^* = 0 \quad (67.b)$$

ここで S_{11} および S_{12} の位相角を ϕ_{11} 、 ϕ_{12} とすると、式(67.b)は

$$\begin{aligned} |S_{11}| |S_{12}| (e^{j(\phi_{12}-\phi_{11})} + e^{-j(\phi_{12}-\phi_{11})}) \\ = 2|S_{11}| |S_{12}| \cos(\phi_{12} - \phi_{11}) = 0 \end{aligned}$$

よって ϕ_{11} と ϕ_{12} には 90° の位相差があることになる。これを踏まえると、無損失対称・可逆 2 ポート回路網における S 行列要素をベクトルで表すと、図 21(b) のようになる。

(b) 3 ポート回路

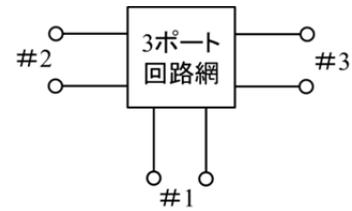


図 22 無損失対称 3 ポート回路

一例として、図 22 のようにポート 1 に対して左右対称な構成の 3 ポート回路を仮定すると、回路の対称性と可逆性より S 行列は

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

であり、これにユニタリ性を適用すると、

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + 2|S_{12}|^2 = 1 & (69.a) \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 & (69.b) \\ S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* + S_{12}S_{23}^* = 0 & (69.c) \\ |S_{12}|^2 + S_{22}S_{23}^* + S_{23}S_{22}^* = 0 & (69.d) \end{cases}$$

になる。ここで各 S 行列要素を

$$S_{nm} = |S_{nm}|e^{i\phi_{nm}}, \quad (n, m = 1, 2, 3) \quad (70)$$

とおき、式(69)に代入すると、

$$|S_{12}| = \sqrt{\frac{1 - |S_{11}|^2}{2}} \quad (71.a)$$

$$|S_{22}| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + |S_{11}|^2 \mp \Psi} \quad (71.b)$$

$$|S_{23}| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + |S_{11}|^2 \pm \Psi} \quad (71.c)$$

但し $\phi = \phi_{22} - \phi_{23}$ として、

$$\Psi = \frac{\sqrt{(1 + |S_{11}|^2)^2 \cos^2 \phi - (1 - |S_{11}|^2)^2}}{\cos \phi} \quad (71.d)$$

を得る。従ってポート 1 が整合状態 ($|S_{11}| = 0$) の時、式(71)より S 行列要素の絶対値は

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

になり、ポート 1 から入射した伝送波の電力はポート 2、3 に等分配される。また S_{22} 、 S_{33} は零にはならず、可逆な 3 ポート回路網では全ポートが同時に整合出来ないことを意味している。

なお回路が非可逆な場合、すなわち

$$S_{12} \neq S_{21}, S_{13} \neq S_{31}, S_{23} \neq S_{32}$$

では、例えば

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

のように、全ポートが整合し、かつユニタリ性を満足する。このような回路は、 $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 1$ 循環動作を示すことからサーキュレータと呼ばれ、送受信機におけるデュプレクサや反射防止素子などに多用される。

(c) 4 ポート回路

可逆な 4 ポート回路では、3 ポート回路と違って全ポートを同時に整合させることができ、その S 行列は、

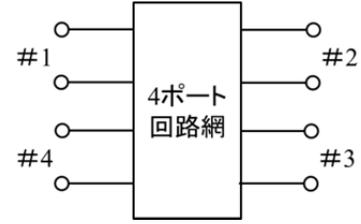


図 23 無損失 4 ポート回路

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

で表される。この式に非対角要素におけるユニタリ性を適用すると、

$$S_{13}^* S_{24} + S_{14}^* S_{24} = 0 \quad (75.a)$$

$$S_{14}^* S_{13} + S_{24}^* S_{23} = 0 \quad (75.b)$$

$$S_{12}^* S_{23} + S_{14}^* S_{34} = 0 \quad (75.c)$$

$$S_{14}^* S_{12} + S_{34}^* S_{23} = 0 \quad (75.d)$$

$$S_{12}^* S_{13} + S_{24}^* S_{34} = 0 \quad (75.e)$$

ここで式(75.a)および(75.b)に S_{24}^* と S_{13}^* を、また式(75.c)および(75.d)に S_{12} と S_{34} をそれぞれ乗じ、式を整理すると、

$$S_{14}^* \left(|S_{13}|^2 - |S_{24}|^2 \right) = 0 \quad (76.a)$$

$$S_{23} \left(|S_{12}|^2 - |S_{34}|^2 \right) = 0 \quad (76.b)$$

なので、

$$S_{14} = S_{23} = 0$$

$$|S_{13}| = |S_{24}|, \quad |S_{12}| = |S_{34}|$$

になる。上式の最初の式は、ポート 1 - 4 間及びポート 2 - 3 間は電力の移行がないという興味深い性質を意味する。このことから、例えばポート 1 はポート 4 に対するアイソレーションポートと称する。

次にこれらの式を対角行列に関するユニタリ性に代入すると、

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (77.a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (77.b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (77.c)$$

$$|S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (77.d)$$

になる。

一例として S_{12} と S_{34} は 観測面を、

$$S_{12} = S_{34} = \alpha$$

と純実数になるよう設定し、かつ S_{13} と S_{24} を

$$S_{13} = \beta e^{j\phi_{13}}, S_{24} = \beta e^{j\phi_{24}} \quad (\text{但し } \beta = \sqrt{1 - \alpha^2})$$

とおき、これらを式(75.e)に代入すると、

$$\alpha\beta(e^{j\phi_{13}} + e^{-j\phi_{24}}) = 2\alpha\beta e^{j\frac{\phi_{13}-\phi_{24}}{2}} \cos\left(\frac{\phi_{13} + \phi_{24}}{2}\right) = 0$$

従って、両位相は

$$\phi_{13} + \phi_{24} = \pi \quad (78)$$

の関係を有する。

もし4ポート回路網が対称であれば、 ϕ_{13} と ϕ_{24} は等しくなるので、 $\phi_{13}=\phi_{24}=\pi/2$ ゆえ、このような回路のS行列は

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (79.a)$$

また同回路網が非対称なら、例えば $\phi_{13}=0$ 、 $\phi_{24}=\pi$ としてS行列は

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (79.b)$$

になる。このような4ポート回路はアイソレーションポートを有することから方向性結合器と呼ばれ、電力分配器や平衡型ミキサなど、受動・能動回路に幅広く利用される。

5.4 S行列の基本的な問題

問5 特性インピーダンスが ζ_1 と ζ_2 の二つの伝送線を縦続接続したとき、この接続点のS行列を求めよ。

問6 ある2ポート回路のS行列が以下のように表される時、この回路は無損失可逆回路であるかどうか調べよ。またポート2を短絡したとき、ポート1の反射係数を求めよ。

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0.1\angle 0^\circ & 0.8\angle 90^\circ \\ 0.8\angle 90^\circ & 0.2\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

問7 F行列をS行列で表せ。

問8 Z行列をS行列で表せ。

問9 Y行列をS行列で表せ。

6. 伝送回路の整合

6.1 整合の意義

3.1節で述べたように、伝送線路に定在波が存在すると電圧や電流にうねりが生じることから、信号が高品質に伝送出来なくなる。しかも反射電力があるため、効率的な信号伝送も出来なくなることから、伝送回路を設計する際、いかに反射を抑制するかがキーポイントになる。その意味で回路を整合させることが重要となる。

6.2 整合理論

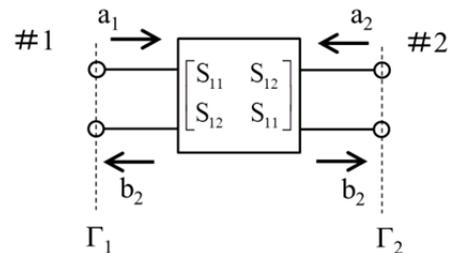


図24 入出力端の反射係数が Γ_1 、 Γ_2 からなる2ポート回路

図24のようにポート2の反射係数が Γ_2 であるような伝送線路に、あるS行列からなる整合回路を挿入し、ポート1で整合させることを考える。

まずポート1の反射係数 Γ_1 は、式(57)より、

$$\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{S_{11} - (S_{11}^2 - S_{12}^2)\Gamma_2}{1 - S_{11}\Gamma_2} \quad (80)$$

なので、整合をとるためには $\Gamma_1=0$ として、

$$\Gamma_2 = \frac{S_{11}}{S_{11}^2 - S_{12}^2} \quad (81)$$

ところで対称2ポート回路のS行列要素は式(67)から、

$$S_{11} = |S_{11}| e^{j\phi_{11}}, S_{12} = \pm j\sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{j\phi_{11}}$$

なので、これを式(81)に代入すると、

$$\Gamma_2 = S_{11}^* \quad (82)$$

を得る。これが整合回路設計のための基本式になる。

続いて一般的に知られている整合条件を以下に説明する。

まず図25のような電源インピーダンス ζ_s からなる電源に負荷インピーダンス ζ_L を接続した場合、負荷で消費される電力が最大になる条件は、

$$\zeta_s = \zeta_L^* \quad (83)$$

と導かれ、これは電源を含む回路における共役整合として知られる。この条件下で、負荷および電源で消費される電力 P_{Lmax} 、 P_{Smin} は、

$$P_{L_{\max}} = P_{S_{\min}} = \frac{|V|^2}{4R_s} \quad (84)$$

となり、負荷と電源で半分ずつの電力を消費することになる。

次に負荷のみに着目すると、図 11 のように特性インピーダンス ζ_0 の伝送線路にインピーダンス ζ_L の負荷を接続した場合、その整合条件は伝送線路上の反射係数が零となるよう、式(28)から

$$\zeta_0 = \zeta_L \quad (85)$$

と求まる。これは、図 11 の $z=l$ の点から左右を見た入力インピーダンスがともに等しくなるとき整合が得られることから、イメージ整合と称する。

なお共役整合もイメージ整合も、電源を含むか否かの着目点のみ違うだけで、本質的に同じであり、ともに式(82)から導かれる結果である。

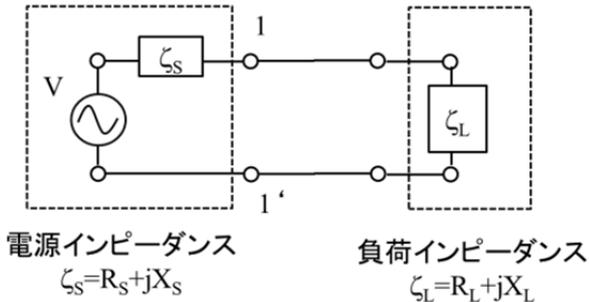


図 25 電源に接続した負荷回路

6.3 各種整合回路

以下では多用される整合回路例を紹介する。

(a) 平衡伝送線路における整合回路例

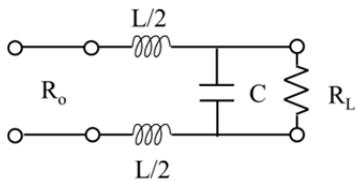


図 26 平衡線路における整合回路例

平衡伝送線路においては、伝送モードの対称性を崩さぬために、例えば図 26 のような整合回路などが用いられる。その整合条件は $R_L > R_0$ として、

$$\begin{cases} \omega L = \sqrt{R_0(R_L - R_0)} \\ \frac{1}{\omega C} = R_L \sqrt{\frac{R_0}{R_L - R_0}} \end{cases} \quad (86)$$

である。

(b) 不平衡伝送線路における整合回路

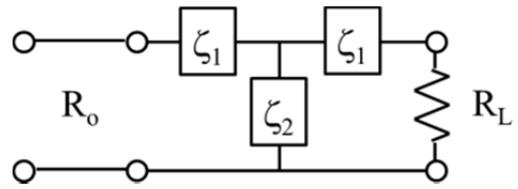


図 27 不平衡線路における整合回路例

不平衡伝送線路では、図 27 のような対称 T 型整合回路が用いられ、その整合条件は、

$$\zeta_1 = -\zeta_2 = \pm j\sqrt{R_0 R_L} \quad (87)$$

である。なお回路構成上 Π 型整合回路を必要とする時があるが、その場合はこの T 型整合回路を Π 型に等価変換すればよい。

(c) $\lambda/4$ 線路整合回路

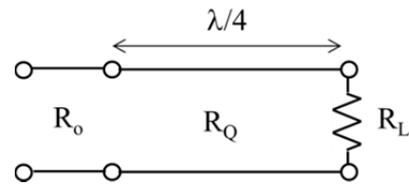


図 28 $\lambda/4$ 整合回路

伝送線路で整合回路を構成する場合によく用いられるのが、図 28 に示す $\lambda/4$ 回路である。その整合条件は式(37)より、

$$R_Q = \sqrt{R_0 R_L} \quad (88)$$

と、 $\lambda/4$ 伝送線路の特性インピーダンス R_Q を、負荷抵抗 R_L と入力側伝送線路の特性インピーダンス R_0 の幾何平均値に設定すればよい。なお上式で R_L 、 R_0 はともに純実数でなければならない。

以上は $\lambda/4$ 線路を一段設けた場合の整合手法であるが、整合帯域を広げる目的で、多段の伝送線路を設ける場合がある。詳細は文献[3]などを参照されたい。また多段 $\lambda/4$ 線路を利用する場合、負荷の状態により、その利用方法を誤ると、整合がとれず、逆に反射が大きくなる点に注意を要する。

(d) スミスチャートを用いた回路の整合例

スミスチャートを用いた整合回路設計は自由度が有り、種々考案することができる。ここでは簡単な例として図 29(a)のように、特性インピーダンス ζ_0 の伝送線路上に ζ_L の負荷インピーダンスが接続された場合、負荷から長さ l_1 の位置に、長さ l_2 の短絡スタブを並列に接続して整合をとる方法を、以下箇条書

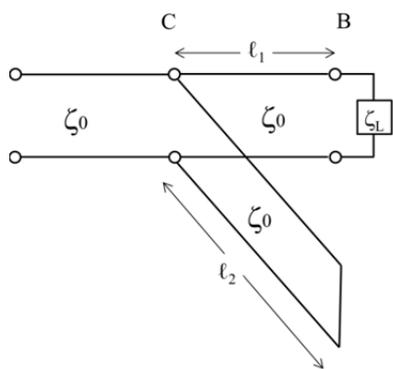
きで説明する。

- ① まず規格化された ζ_L が図 29(b)に示すスミスチャート上の A 点であったとする。
- ② 並列スタブを用いて整合回路を設計するので、このインピーダンスを B 点まで移動し、規格化アドミタンスに変換する。
- ③ 次に OB を半径とする円周に沿って電源方向に B 点を回転させ、規格化コンダクタンスが 1 の円と交わる点を C とする。この点の規格化アドミタンスは

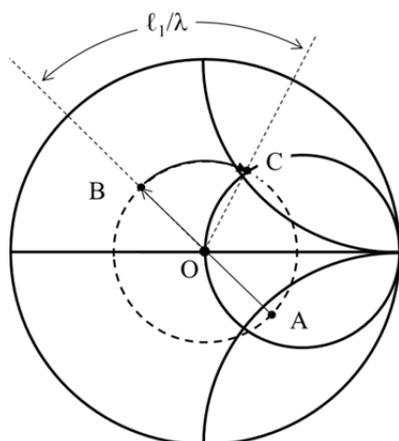
$$\hat{\eta}_C = 1 + jb$$

であり、この回転に要した長さを l_1 とする。

- ④ 最後にこの規格化アドミタンスのサセプタンスを相殺するように C 点から短絡スタブを見込んだ規格化アドミタンスが $-jb$ になるべく、式(35)をもとに l_2 を決定し、整合回路設計は完了する。なお式(35)を使わず直接スミスチャートを用いても l_2 は決定できるので、スミスチャートに慣れた方はその方が便利であろう。



(a) 負荷で終端された伝送線路



(b) スミスチャート上のインピーダンス変化

図 29 スミスチャートを用いた回路の整合例

(e) $\lambda/2$ 線路を用いた回路の整合

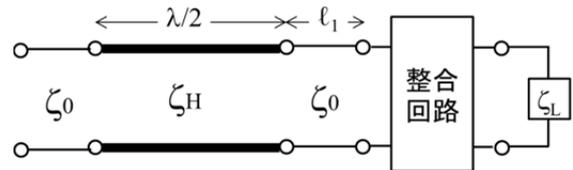
これまで述べた整合回路は、設計周波数でのみ反

射が零になるが、実際にはある程度の反射係数を許して、その反射係数以下になるよう周波数帯域を広げる工夫をする場合が多々ある。

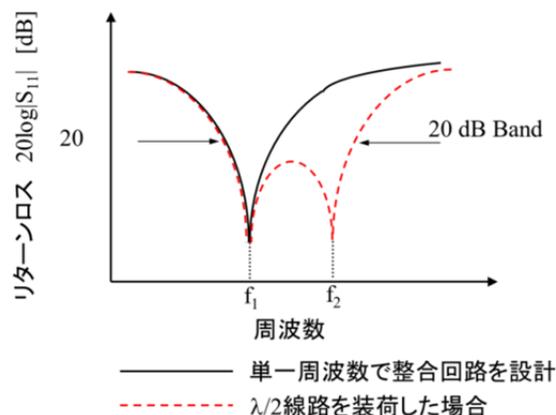
たとえば図 30(a)のように、特性インピーダンス ζ_0 の伝送線路に負荷インピーダンス ζ_L を接続した回路を上述の方法を用いて、単一周波数 f_1 で整合させたとする。この時リターンロスは図 30(b)の実線のように周波数 f_1 で最も大きな値をとる(リターンロスで反射を評価する場合は、その値が大きいほど反射は少ないことを意味する[2])。

ここで整合回路から電源側に長さ l_1 だけ離れた位置に、特性インピーダンス ζ_H 、長さが周波数 f_1 で半波長になる線路を挿入すると、周波数 f_1 ではこの半波長線路は共振器として働くことから、リターンロスは変わらないが、伝送線路—半波長線路間の反射波の大きさと、元々の整合回路からの反射波の大きさが等しくなる周波数 f_2 では、 l_1 の長さを適切に設定すると、両反射波の位相を打ち消すことができ、図(b)の点線のようにリターンロスが大きくなるもう一つの周波数 f_2 が存在することになる。このような手法により整合帯域を広げることができる。

なお厳密に言えばこの手法は、半波長線路と伝送線路の接続点における界の乱れまで考慮して設計しなければならないので、電磁界解析と伝送回路理論を併用し、カットアンドトライで整合を検討する必要があることに注意されたい。



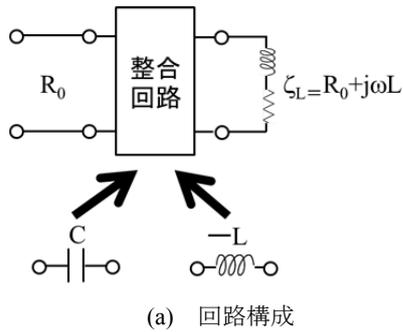
(a) 回路構成



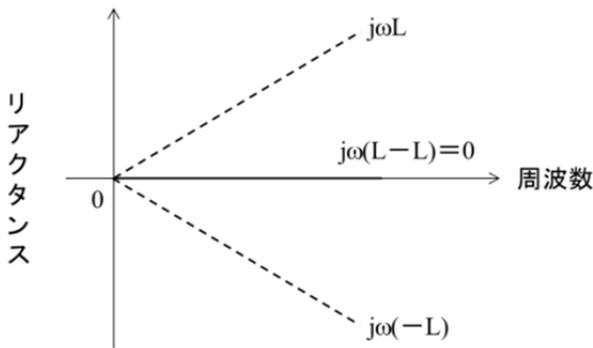
(b) リターンロスの周波数特性

図 30 $\lambda/2$ 線路を用いた回路の整合例

(f) Non-Foster 型整合回路



(a) 回路構成



(b) リアクタンスの周波数特性

図 31 Non-Foster 型素子を用いた回路の整合例

一般に回路網の入リアクタンスは、周波数の増加とともに $0 \rightarrow \infty$ 形、 $-\infty \rightarrow 0$ 形、 $-\infty \rightarrow \infty$ 形、 $0 \rightarrow 0$ 形の 4 種に大別され、いずれの場合も入力リアクタンスの周波数微分値は正の傾きを有する[2]。このような回路網を Foster 型と称するが、それゆえ整合回路の帯域は有限になる。

たとえば図 31(a)のように特性インピーダンス R_0 (純実数)の伝送線路に $R_0 + j\omega L$ の負荷が接続された場合、整合回路として下図左側のコンデンサを直列に接続すれば、この負荷は周波数

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

で整合できる。しかしながら、インダクタンスおよびコンデンサからなるリアクタンスの周波数変化はいずれも正の傾きを有することから、この周波数のみしか整合出来ず、動作周波数が整合周波数を離れるにつれて、負荷からの反射は増加してくる。

これに対して何らかの方法で負のインダクタンスが実現できたとすると、図 31(b)のようにそのリアクタンスは負の傾きを有することから、広帯域に整合状態が実現できる。このような負のインダクタンスを利用した整合回路は Foster 型ではないことから、Non-Foster 型整合回路といい、1953 年頃に Linvill ら

によって提案された。

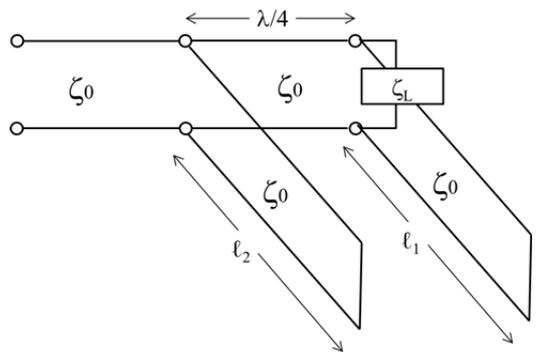
Non-Foster 型のリアクタンス素子を構成することは容易ではなく、近年のメタマテリアルと称する素子の利用も考えられるが、大きな損失が致命的で、かえって回路の性能劣化を招いてしまう。現状では半導体の負性インピーダンス特性などを利用し、小形アンテナの整合などが検討されている。

6.4 整合に関する基本的な問題

問 10 特性インピーダンス 50Ω の伝送線路に $300 - j50\Omega$ の負荷を接続した。整合周波数を 300MHz として、以下の問いに答えよ。

- (1) T型回路を用いて整合回路を設計せよ。
- (2) 並列スタブを用いて整合回路を設計せよ。
- (3) $\lambda/4$ 線路を用いて整合回路を設計せよ。

問 11 下図のように並列スタブを 2 つ利用した回路の整合手法を考案せよ。



7. あとがき

以上、伝送線路理論の基礎から整合回路までを概説した。紙面の関係で十分な説明が欠落している点、多々あり、お詫び申し上げたい。また浅学非才なため、思い間違いの点もあるやに感じ、この点はご指摘頂ければ幸いである。

なお本基礎講座全般にわたって概説した伝送理論は、著者の恩師である米山務東北大・東北工大名誉教授、故西田茂穂東北大名誉教授に師事するところが極めて大きく、この場をお借りして深謝申し上げます。

文 献

- [1] 黒木太司、“ミリ波工学特論 ー基本的な考え方とその実態ー”、APMC2010 基礎講座テキスト、pp.29-38、12月、2010年
- [2] 佐藤利三郎、“伝送回路”、コロナ社、1970
- [3] G.Matthaei, L.Young, E.M.T.Jones, "Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, And Coupling Structures", 1980
- [4] 池田哲夫、“電気・電子学生のための回路網理論”、丸善、1980