

<APMC 2010 基礎講座>

5. 発振回路の基礎 —NINOの概念とインポート行列法—

豊橋技術科学大学
大平 孝氏

12月9日(木) 15:00~16:30

発振回路の基礎

NINOの概念とインポート行列法

大平 孝

豊橋技術科学大学

ohira@tut.jp

あらまし 回路が発振するとは一体どのようなことなのだろうか。入出力ポートがなく、外界とのエネルギーのやりとりが遮断されている系を考える。もしこの系の内部に非零のRF電圧が存在するならばそれは発振であるといえる。内部のRF電圧を観測するために、回路中のすべての節点に仮想ポートを設ける。どのポートにもRF電流を流さない状態で、どれかひとつでもRF電圧が観測されることが発振条件である。この条件を回路技術者になじみ深い指標であるYパラメータの言葉に翻訳すると $|Y| = 0$ あるいは $\det Y = 0$ となる。発振回路の仮想ポートY行列が定式化できると、そこから発振周波数 ω ならびに発振に必要なデバイス利得 (FETの伝達コンダクタンス g_m) が決まる。これら一連の考え方を簡単な回路例に適用して説明する。これにより回路図からY行列を求める手法、回路が発振するための条件、ならびに発振条件式の正しい使い方の本質理解を目指す。

キーワード：能動回路、発振条件、NINO、仮想ポート、アドミタンス行列

1 まえがき

発振回路の設計現場において、発振周波数を予測するにはSPICEなどで時間領域トランジェント解析されるのが通常である。また、高周波電力増幅回路の設計現場において、寄生発振可能性のチェックは市販シミュレータで小信号線形解析するのが実態である。コンピュータの性能向上に伴い、複雑な回路構成であってもその時間軸波形や周波数特性を数値解析できるようになってきた。しかしながら、コンピュータは数値結果を出すことができても、その物理的意味までは与えてくれない。シミュレータを利用する場合においても、取り扱う回路における高周波信号の振る舞いの本質を理解しておくことがなによりも肝要である[1]。そこで本講座では、能動回路が発振するか否か、発振する場合にその発振周波数がどのようなメカニズムで決まるのかを基本に立ち戻りわかりやすく解きほぐす。

2 NINOモデル

発振回路は基本的に少なくとも1個の能動デバイス、発振周波数を定めるための受動素子、出力ポートから構成される。簡単な構成の一例としてハートレー型発振器を図1に示す。能動デバイスとしてソース接地FETを用いる。発振周波数を主として決める素子は L_1 , L_2 , C である。右端が出力ポートである。RFCはFETに直流エネルギーを与えるためのRFチョーク、 C_c は出力ポ

ートへの直流を阻止するためのDCカットであり、どちらも十分大きな値であるため発振特性にほとんど寄与しない。そこで、これら直流バイアス回路を省略したRF等価回路を図2に示す。

一般に発振特性は回路トポロジおよび素子定数のみならず出力ポートに接続する負荷インピーダンスに依存する。そこで図2では出力ポートを負荷抵抗 R で終端し、次節以降では R を含んだ全体系で発振特性を解析する。このようにRF的に閉じられた回路モデルを No-Input-No-Output (NINO：ナイノ) と呼ぶ[2]。

3 仮想ポートの付加

前説で述べたとおりNINOモデルは出力ポートを内部に取り込んでいるので、そのままでは内部素子電圧を外から観測できない。そこで、解析を始めるために回路内部の各節点と接地点の間に「仮想的な」ポートを設ける。これは物理的には各節点に入力インピーダンス無限大 Ω (浮遊容量ゼロ) の理想電圧プローブを付けることを意味する。例えば図2に示したハートレー回路は3つの節点 (接地点を除く) をもつので、仮想ポートを3個設置することとする。その結果を図3に示す。なお、各仮想ポートは電圧をチェックするためのだけの機能であり、電流の出入りは発生させない。従って、これら仮想ポートを設けたことによって発振特性に擾乱を与えることはない。

4 インポート行列

前説で設けた仮想ポートから発振回路内部を見込んだアドミタンス行列 (Y行列) を考える。回路トポロジと素子定数が与えられると、その回路のY行列は一意に定まる。与えられた回路のY行列を求める手法はいくつかあるが、ここでは鉄道駅法を用いる。

これは回路を鉄道駅と考え、各ポートを駅に出入りする線路 (2本のレール対) とみだてて並列分解する手法である。この方法は、全体の回路トポロジが複雑な場合に特に威力を発揮する。まず、全体を複数の基本回路に分解する。その際、どの素子がどのポートに接続されているかに注意する。分解された個々の要素回路はすべて簡単な2ポート構造: すなわち、

- 1) セパレート型 2) シャント型
- 3) シリーズ型 4) 伝達型

のいずれかとなる。これらを基本トポロジと呼び、そのY行列は美しく覚えやすい。各々のアドミタンスを順次加算していだけで全体回路のアドミタンス行列が求まるとする利点がある。基本ルールさえ覚えれば計算間違いが比較的少ない。一度マスターすると様々な回路に適用できる。(この方法の詳細は文献[1]参照)

例として、図3に示した3ポート回路を考える。この回路は5個の素子で構成されているので、図4に示すような5個の基本回路に並列分解できる。これが鉄道駅法である。つまり、3方面から到着した列車が5つのプラットフォームに分かれて停車し、再び3方面へ出発するのである。この例では、L₁という列車は#1方面から到着し折り返し#1方面へ発車、FETという列車は#1方面から到着し#2方面へ発車するといった具合である。最後に、図4に示した5個の基本Y行列をすべて加算して、回路全体のY行列

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C & -j\omega C & 0 \\ g_m - j\omega C & j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L_2} & \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

を得る。このように回路中の各節点に仮想ポートを設けて定義されるアドミタンスパラメータを要素にもつ行

列を「インポート行列: Imaginary Port Matrix」と呼ぶ。能動回路のインポートY行列が定式化できると、そこから発振可能性判別、発振周波数 $\omega (= 2\pi f)$ の推定、ならびに発振に必要なデバイス利得 (FETの伝達コンダクタンス g_m) の見積もりが可能となる。その方法を次節で辿る。

5 発振条件式

NINOモデルで表される回路に付加する仮想ポート数を n 、それら各ポートのRF電圧と電流をそれぞれ

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \\ i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$$

と書き、これらの間に線形性を仮定してY行列を

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$$

と定義する。これをベクトル表記で $Yv = i$ と書く。

NINOモデルで表される系は信号入力端子も出力端子もなく、外界とのエネルギーのやりとりが遮断されている。もし「この系の内部に特定周波数のRF電圧が存在する」ならばそれは「発振」であるといえる。逆もまた真である。言い換えると

「仮想ポートのうちどのポートにもRF電流を流さない状態で、どれかひとつでもRF電圧が観測される」

ことが発振条件である。これをベクトル表現すると

$$i = \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad v \neq \mathbf{0}$$

である。さらにこれをY行列を用いて表現すると

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

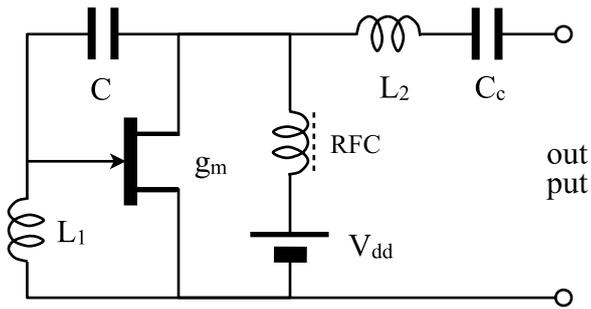


図1 ハートレー型FET発振器

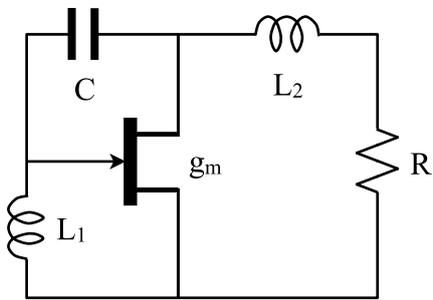


図2 NINOモデルRF等価回路

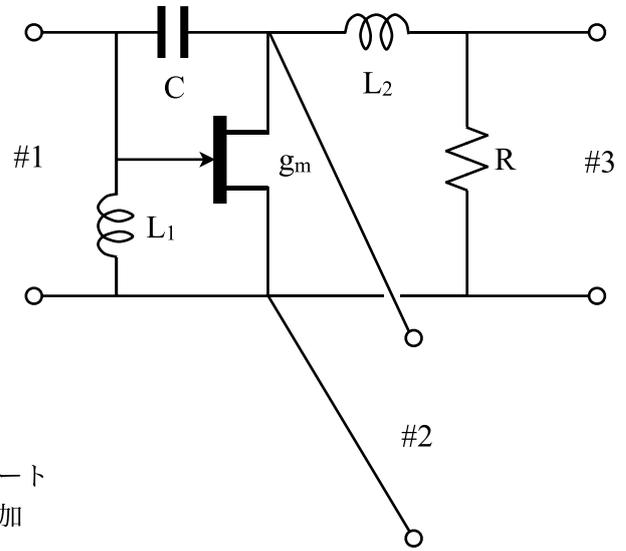


図3 インポートモデル

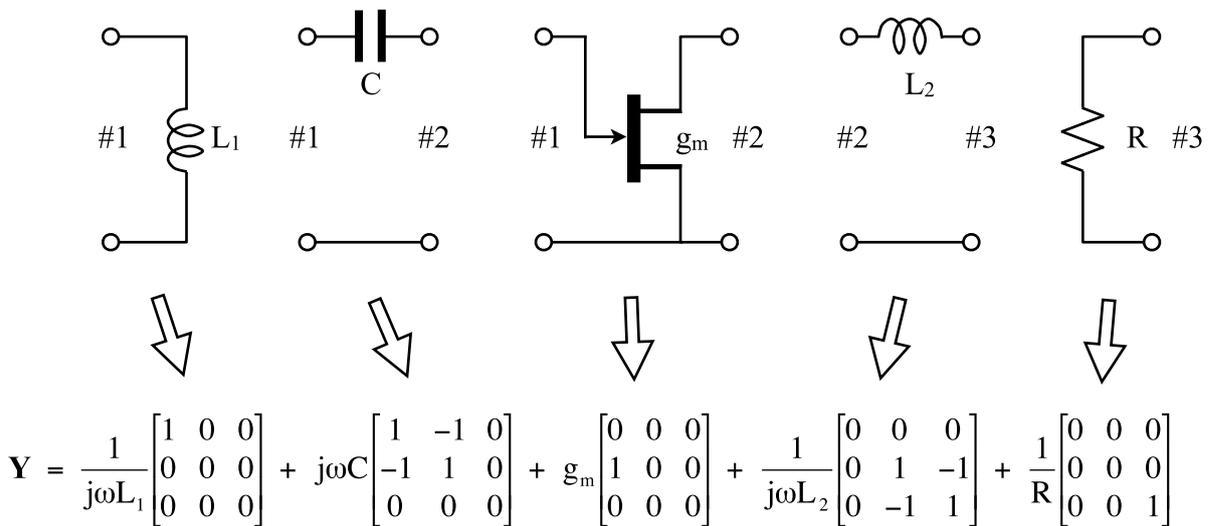
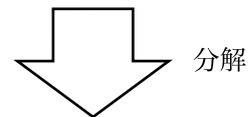


図4 鉄道駅法による並列分解とアドミタンス行列合成

となる。これらが両立することは数学的に

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

と等価である。縦棒対記号 $|\cdot|$ は行列式を表す。上式は簡単に $|\mathbf{Y}| = 0$ あるいは $\det \mathbf{Y} = 0$ と表記してもよい。一般に \mathbf{Y} 行列の要素は複素数なので、上式は実部・虚部ともに零となること、つまり

$$\operatorname{Re}|\mathbf{Y}| = 0$$

$$\operatorname{Im}|\mathbf{Y}| = 0$$

が発振条件であることを意味する。この連立式から発振周波数 ω ならびに必要デバイス利得 g_m が決定される。具体的な計算例を次節で演習する。

6 具体回路例への適用

上式の発振条件を図3に示したハートレー回路に適用する。この回路のインポート行列 \mathbf{Y} は前々節で求めたので、そこから行列式 $|\mathbf{Y}|$ を計算し、さらにそれを展開すると

$$|\mathbf{Y}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C & -j\omega C & 0 \\ g_m - j\omega C & j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L_2} & \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C \right) \begin{vmatrix} j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

$$-(g_m - j\omega C) \begin{vmatrix} -j\omega C & 0 \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{C}{L_1 R} + \frac{C}{L_2 R} - \frac{1}{\omega^2 L_1 L_2 R} + \frac{C g_m}{L_2}$$

$$+ \frac{C}{j\omega L_1 L_2} + \frac{j\omega C g_m}{R}$$

となる。展開結果式の初項から第4項は実数、第5項と末項は純虚数である。実部・虚部をそれぞれ通分し、それらの分子がどちらも零となるには

$$\omega^2 (L_1 C + L_2 C + L_1 C R g_m) = 1$$

$$\omega^2 L_1 L_2 g_m = R$$

であればよい。これでこの回路の発振条件が得られた。これらを ω と g_m を未知数とする2元連立方程式と見て解くと

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{L_1 + L_2} \left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{L_2} \right)}$$

$$g_m = \frac{L_1 + L_2}{L_1} \frac{CR}{L_2 - CR^2}$$

を得る。これが図3に示したハートレー回路の発振周波数と必要デバイス利得の公式である。回路に用いられる素子定数は全て正数なので、上式の結果から

- 1) 発振周波数 f は L_1 と C に対して単調減少であるが、一方 L_2 に対しては停留点が存在する。
- 2) f は負荷抵抗 R があることで LC 共振周波数よりも低くなる。
- 3) 負荷 R が高くなると発振に必要なデバイス利得 g_m もそれに伴って高くなる。

4) さらにRが高くなって $L_2 \leq CR^2$ となると解なし。すなわち g_m に関わりなく発振不可となる。

ということがわかる。

このようにインポート行列法を用いると様々なトポロジの能動回路の発振周波数の公式を手計算で導き出すことができる。得られた公式により、素子定数をどのように変えると発振性能がどのように変わるかが見とおしよく理解できる。

7 むすび

発振現象は能動デバイスや負荷抵抗など回路を構成する全ての要素を含む閉じた系において、外界との信号授受なしで内部に特定周波数のRF電圧が存在している現象である。これは回路内の各節点に仮想的なRFポートを設けて定義されるアドミタンス行列の行列式の実部 $\text{Re} |Y|$ と虚部 $\text{Im} |Y|$ が同時に零となることと数学的に等価である。これら2つの式を連立方程式とみることにより、2つの未知数である発振周波数および必要デバイス利得が決定される。数個程度の素子からなる規模の回路であれば、回路図からアドミタンス行列式を紙と鉛筆で導くことができる。また、この手順を簡単な回路構成で演習することにより理解しておけば、複雑な回路構成の場合には回路図からアドミタンス行列を計算する部分をシミュレータに行わせることにより数値的に発振周波数を求めることもできる。

本講座では発振回路の特性を解析する方法をNINOモデルとインポート行列を用いてわかりやすく説明した。ここで述べた考え方は発振回路設計の第1歩である。これを十分理解することで発振動作安定性・振幅最大化・位相雑音最小化・注入同期Qファクタなど次のステージ[3-13]に進むための出発点となる。

文 献

[1] 大平 孝, "行列ができる回路演習: アナログ回路を紙と鉛筆で考えよう", 電子情報通信学会誌, vol. 93, issue 1, pp. 67-72, Jan. 2010.

[2] 大平 孝, 荒木純道, "発振回路のNINO/NISOモデル", 電子情報通信学会誌: ブロードバンド無線通信を支えるマイクロ波ミリ波小特集, vol. 90, issue 4, pp. 259-262, April 2007.

[3] T. Ohira and T. Wuren, "Pseudolinear circuit theory for sinusoidal oscillator performance maximization

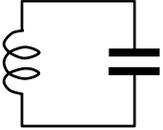
(invited)", IEICE Trans. Electron., vol. E91-C, issue 11, pp. 1726-1737, Nov. 2008.

- [4] 西田朋世, 小林真純, ウリントヤ, 上原秀幸, 大平 孝, "FET 1 個とLC 3 個とR 1 個で構成される発振回路トポロジの全探索", 電子情報通信学エレクトロニクスソサイエティ大会, C-2-6, Sept. 2009.
- [5] T. Ohira and K. Araki, "Active Q factor and equilibrium stability formulation for sinusoidal oscillators", IEEE Trans. Circuits and Systems Part II, vol. CASII-54, issue 9, pp. 810-814, Sept. 2007.
- [6] 伊東健治, 津留正臣, 川上憲司, "マイクロ波発振器設計の基礎", Microwave Workshops and Exhibition, MWE 2007, 基礎講座, pp. 503-514, Nov. 2007.
- [7] S. Sakihara, O. Ishida, and T. Ohira, "Phase noise analysis of sinusoidal oscillators based on forced-oscillation model", 2010 Asia-Pacific Microwave Conference, APMC2010, TH1A-04, Yokohama, Dec. 2010.
- [8] Y. Iyama, "Q-factor formulations as a function of ladder network transmission phase", Proceedings of 2009 Korea-Japan Microwave Conference, KJMW2009, pp. 109-112, April 2009.
- [9] 竹田慎平, 黒木太司, "散乱行列に着目した2端子対回路発振器におけるQファクタの数値計算", 電子情報通信学会技術報告, MW2010-32, pp. 31-36, June 2010.
- [10] J. Borremans, A. Bevilacqua, S. Bronckers, M. Dehan, M. Kuijck, Q. Wambacq, and J. Craninckx, "A compact wideband front-end using a single-inductor dual-band VCO in 90 nm digital CMOS", IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 43, issue 12, pp. 2693-2705, Dec. 2008.
- [11] X. Huang, F. Tan, W. Wei, and W. Fu, "A revisit to phase noise model of Leeson," IEEE International Frequency Control Symposium Joint with European Frequency and Time Forum, pp. 238-241, Geneva, May 2007.
- [12] Y. Ishikawa, S. Yamashita, and S. Hidaka, "Noise temperature of active feedback resonator," IEICE Trans. Electron., vol. E76-C, issue 6, pp. 925-931, June 1993.
- [13] T. Ohira, "Extended Adler's injection-locking Q factor formula for general one- and two-port active device oscillators", IEICE Electronics Express, ELEX, vol. 7, issue 19, pp. 1486-1492, Oct. 2010.

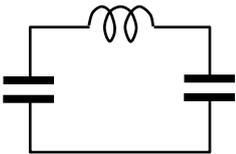
付録 演習問題

インポート行列法を用いて下記に示す各回路の共振周波数または発振周波数の公式を導け。ただし、ひとつの回路にLまたはCが複数含まれている場合はそれらは全て同じ素子値とする。

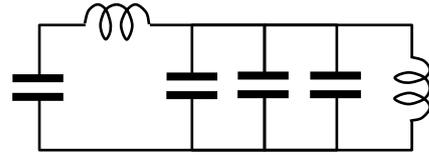
問1 単一LC共振回路



問2 π 型LC共振回路



問3 直並列混在LC共振回路



問4 コルピッツ発振回路

