

<APMC 2010 基礎講座>

2. 分布定数線路モデルを用いた マイクロ波回路の考え方

宇都宮大学

古神義則 氏

兵庫県立大学

河合 正 氏

山口大学

真田篤志 氏

12月8日(水) 15:00~16:30

分布定数線路モデルを用いたマイクロ波回路の考え方

古神 義則^{#1}, 河合 正^{*2}, 真田 篤志^{**3}

[#]宇都宮大学 ^{*}兵庫県立大学 ^{**}山口大学
 宇都宮市陽東7-1-2 姫路市書写2167 宇部市常盤台2-16-1
¹kogami@cc.utsunomiya-u.ac.jp
²kawai@eng.u-hyogo.ac.jp
³as@yamaguchi-u.ac.jp

あらまし - 分布定数線路モデルはマイクロ波受動回路を考察する上で、簡便で有効なツールである。本講座では、共振器・フィルタ、方向性結合器、電力分配器/合成器などの基本的なマイクロ波回路、さらには左手系メタマテリアルなどを用いた高機能回路の伝搬特性・動作原理を理解するために分布定数線路モデルが有用であることを示す。

キーワード - 分布定数線路モデル, 共振器, フィルタ, 方向性結合器, メタマテリアル。

I. はじめに

線路上の信号伝搬を考える際、線路長が波長に比べて十分短くない場合、位置による信号位相の変化を考慮するために分布定数線路という概念が用いられる。伝搬する信号の様子は、位置座標に加えて特性インピーダンスと伝搬定数というパラメータで表現される。一般のマイクロ波伝送線路では、そこに伝送される伝送モードそれぞれに着目すれば、伝送方向に対して垂直な断面（横断面）内の電磁界分布（modal fields）と伝送方向の伝搬定数で特徴づけられる。従って、特性インピーダンスと modal fields を関連付ければ、マイクロ波回路内の一つのモードを、一本の分布定数線路モデルで表現でき、回路論的にマイクロ波回路を取り扱うことが可能となる。電磁界を厳密に計算することに比べはるかに簡便であり、マイクロ波回路の信号伝搬のメカニズムを理解するのに有用である。本講座では、いくつかの基本的なマイクロ波回路を取り上げ、その動作原理について、分布定数線路モデルを用いた考察を行う。

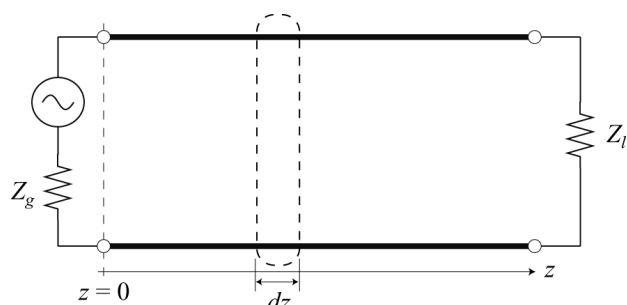
II. 分布定数線路モデルについて

まず、基礎事項として分布定数線路における信号伝搬の考え方を確認する[1][2][3]。

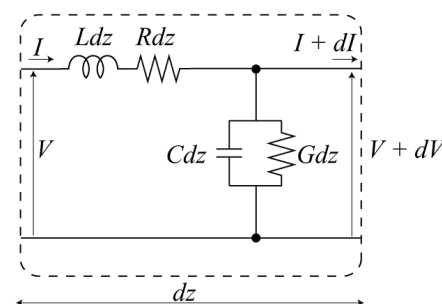
図1に分布定数線路を示す。今、線路上の任意の点から微小区間 dz の部分を図1(b)の様に考える。回路方程式、

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V \quad (2)$$



(a) 分布定数線路



(b) 微小区間 dz の等価回路

図1 分布定数線路の考え方

より、以下の2つの方程式が導出される。

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0 \quad (4)$$

ただし、

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (5)$$

は伝搬定数である。伝搬定数を、減衰定数 α [Np/m]、位相定数 β [rad/m] を用いて、

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (6)$$

と表すと、 α , β はそれぞれ次式で与えられる。

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + \frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC)} \quad (7)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - \frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC)} \quad (8)$$

式(3)および式(4)の解は、

$$V = V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z} \quad (9)$$

$$I = I_i e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z} \quad (10)$$

と、前進波電圧振幅 V_i 、後進波電圧振幅 V_r 、前進波電流振幅 I_i 、後進波電流振幅 I_r を用いて表される。また、

$$V = V_o \cosh \gamma z + V_s \sinh \gamma z \quad (11)$$

$$I = I_o \sinh \gamma z + I_s \cosh \gamma z \quad (12)$$

のように、振幅 V_o 、 V_s 、 I_o 、 I_s をもつ電圧定在波および電流定在波を用いて表現することもできる。ここで、 V_o 、 I_o は $z=0$ が磁気壁となる定在波振幅であり、 V_s 、 I_s は $z=0$ が電気壁となる定在波振幅である。

式(9)を式(1)に代入し、式(5)の関係を考慮して、式(10)と比較すると

$$I_i = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_i, \quad I_r = -\sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_r \quad (13)$$

の関係をj得る。ここで、

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (14)$$

と定義すると、線路の前進波、後進波いずれについても、その電圧と電流の比、すなわちインピーダンスは Z_c であることが分る。この Z_c を特性インピーダンスと呼ぶ。式(11)を見ると分るように、 Z_c は線路の微小区間の回路パラメータで決定される。それらは線路断面内の構造や媒質定数で決定されるので、線路が伝送方向に一樣ならば、特性インピーダンスも一定である。

マイクロ波回路を扱う際、「入力インピーダンス」や「観測インピーダンス」などの他のインピーダンスを表す用語もよく用いられるが、特性インピーダンスとは区別しなければならない。今図2に示す様に、特性インピーダンス Z_c の分布定数線路の左端に内部インピーダンス $Z_g = Z_c$ の信号源を、右端に負荷 Z_l をそれぞれ接続した回路を考える。負荷 Z_l をその直前の位置 B において測定すると、当然 Z_l を得るはずであるので、その位置 ($z = d$) における電圧および電流を式(9)、(10)より求めてその比を算出すると Z_l に等しくなる。

$$Z_l = \frac{V_i e^{-\gamma d} + V_r e^{\gamma d}}{\frac{V_i}{Z_c} e^{-\gamma d} - \frac{V_r}{Z_c} e^{\gamma d}} = Z_c \frac{1 + \Gamma_B}{1 - \Gamma_B} \quad (15)$$

ただし、 Γ_B は位置 B における電圧反射係数（電圧前進波と後進波の比）である。

$$\Gamma_B = \frac{V_r e^{\gamma d}}{V_i e^{-\gamma d}} \quad (16)$$

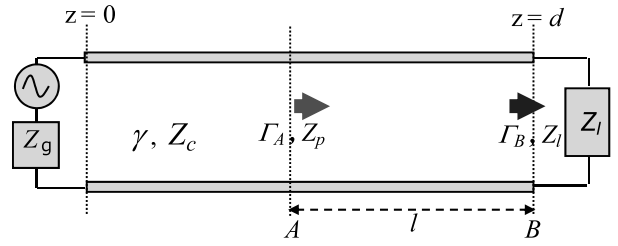


図2 分布定数線路上の位置を変えてインピーダンスを観測

すなわち、反射係数の測定により負荷インピーダンスの測定が行える。ただし、反射係数は線路上の位置によりその値を変えることに注意しなければならない。今、位置 A における電圧反射係数を考え、 Γ_B と比較してみる。

$$\Gamma_A = \frac{V_r e^{\gamma(d-l)}}{V_i e^{-\gamma(d-l)}} = \Gamma_B e^{-2\gamma l} \quad (17)$$

位置 A において負荷側を観測したときのインピーダンスを Z_p とすると、

$$Z_p = Z_c \frac{1 + \Gamma_A}{1 - \Gamma_A} = Z_c \frac{1 + \Gamma_B e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_B e^{-2\gamma l}}$$

また、式(15)より

$$\Gamma_B = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}$$

なので結局、

$$Z_p = Z_c \frac{Z_l + Z_c \tanh \gamma l}{Z_c + Z_l \tanh \gamma l} \quad (18)$$

の関係をj得る。すなわち、分布定数線路における観測インピーダンスは、 Z_c と異なり、一般に位置により変化する。マイクロ波回路において負荷インピーダンスを測定する際には、測定参照位置（位相基準面）を定め、実際の観測点の位置を正確に把握しておく必要があることが、以上の考察より分る。

次に、マイクロ波伝送線路と分布定数線路モデルとの対応について考察してみる。

まず、図3の同軸線路について考える。ここで、内部導体および外導体の半径をそれぞれ a 、 b 、表面抵抗を R_s とし、外部—内部導体間媒質の比誘電率、比透磁率および誘電正接をそれぞれ ϵ_r 、 μ_r 、 $\tan \delta$ とする同軸線路の伝搬定数を分布定数線路モデルの式(5)を用いて考える場合、単位長さ当たりのインダクタンス L および静電容量 C は、

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (19)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln b/a} \quad [\text{F/m}] \quad (20)$$

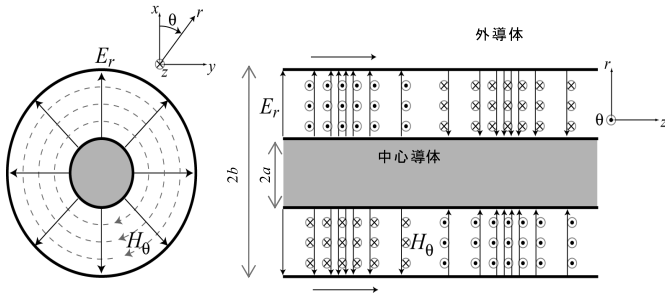


図3 同軸線路の基本モードの電磁界

で与えられる．ここで， ϵ_0 ， μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率，透磁率である．また，同軸線路の内部および外部導体の導体損失は R で，外部—内部導体間の誘電損は G で表現できる．内部導体および外導体の半径を，それぞれ a ， b と表面抵抗を R_s とすると，

$$R = \frac{R_s}{2\pi a} + \frac{R_s}{2\pi b} \quad (21)$$

外部—内部導体間媒質の誘電正接を $\tan\delta$ とすると，

$$G = \omega C \tan\delta \quad (22)$$

の関係を得る[4]．

以上の様に，同軸線路の伝搬特性を，分布定数線路モデルの回路素子値を用いて表現することは容易い．同軸線路が分布定数線路と同様 TEM 線路であり，かつその電磁界が容易に求まるからである．

同様に TEM 近似が成り立つマイクロストリップ線路やコプレーナ線路についても，構造や材料定数を与えることにより，対応する分布定数線路モデル素子値を決定することは出来るが，一般に電磁界の数値計算に頼らねばならない．従って，これらの線路を分布定数線路的に取り扱う場合，線路構造に対して計算される特性インピーダンスと伝搬定数のみを用い，式(9)や式(10)などで算定される電圧・電流分布を，実際の電磁界分布の代わりに用いて考察するにとどめるのが普通である．この点，マイクロ波導波管についても同様であるが，導波管モードに対する特性インピーダンスの定義が一意的でないことに注意する必要がある．さらに，図1の分布定数線路モデルは，単独の伝送モードのみ考慮していることにも留意すべきである．

III. 共振器・フィルタの考察

マイクロ波共振器やフィルタは，ある特定の周波数の信号のみ選別する目的で良く用いられる回路部品である．フィルタにも様々なタイプがあるが，ここで取り上げるのは，複数の共振器を多段配列し互いを結合させたものである．本節では，これらを分布定数線路モデルで考察する．

まず基本問題として，図4に示される半波長共振器を考える．共振器内部では無損失を仮定し， $\gamma = j\beta$ と

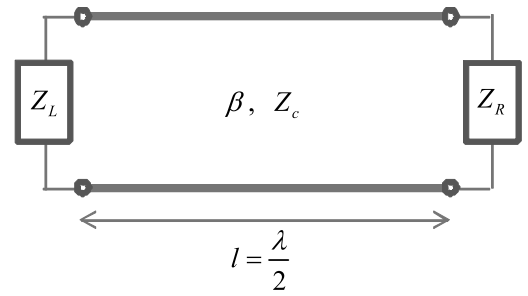


図4 分布定数線路半波長共振器

おく．両端のインピーダンス Z_L ， Z_R が， $Z_L = Z_R = \infty$ のとき両端開放共振器となり， $Z_L = Z_R = 0$ のとき両端短絡共振器となる．

$Z_L = Z_R = \infty$ のとき，式(9)および(10)を用いて，電圧および電流分布を計算すると，

$$v(z) = 2V_i \cos \beta z$$

$$i(z) = -j \frac{2V_i}{Z_c} \sin \beta z \quad (23)$$

となり，式(11)，(12)において，それぞれ第1項のみが存在する場合に相当することが分る．電圧と電流は時間的にも空間的にも位相が90度ずれる．この際の電磁エネルギー流を複素ポインティングベクトルの実部として計算すると，

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ v(z) e^{j\omega t} \cdot (i(z) e^{j\omega t})^* \} = 0 \quad (24)$$

となり，共振器内ではエネルギー流が停滞していることが分る．電圧電流の瞬時値同士を掛け合わせ，瞬時ポインティングベクトルを計算すると，

$$\operatorname{Re} \{ v(z) e^{j\omega t} \} \cdot \operatorname{Re} \{ i(z) e^{j\omega t} \} = \frac{4V_i^2}{Z_c} \cos \omega t \sin \omega t \cos \beta z \sin \beta z \quad (25)$$

となる．これを電圧・電流分布とともに図5に示す．

図5(a)は，時刻 t が $1/8$ 周期のときの各分布を示す． $t=0$ で振幅最大であった電圧振動は，その振幅を減じている最中である．それとは逆に，電流分布の振幅は

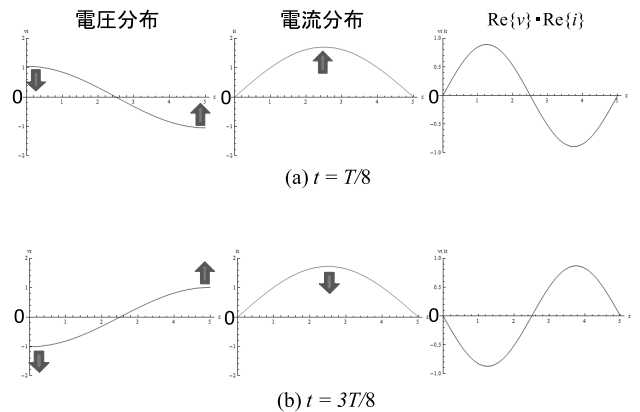


図5 周期 T で振動する両端開放型共振器の電圧・電流分布と瞬時ポインティングベクトル（横軸は線路内位置）

増大する途中である．このとき瞬時ポインティングベクトルは，線路中央から左半分では正，右半分では負である．以上の事から，このときエネルギーは両端から中央に向かって流れると同時に，電氣的エネルギーから磁氣的エネルギーへ変換されていることが分る．

図 5(a)の状態から時間が 1/4 周期経過した状態を，図 5(b)に示す．一度，振幅ゼロとなった電圧は，逆相方向に再び増大する最中である．電流は逆に減少し始めている．瞬時ポインティングベクトルは，線路中央から左半分では負，右半分では正となり，エネルギーは中央から両端に戻り，再び磁氣的エネルギーから電氣的エネルギーに再変換されていることが分る．この様に，共振器内部では，エネルギーが性質的にも空間的にも往復を繰り返す．ある特定の方向へのみ流れ続けるということはない．もちろん，両端が短絡された共振器についても，同様のことが言える．

しかし，透過型共振回路やフィルタのように，入力端子から出力端子へ，信号エネルギーを一方向に伝送させるメカニズムはどのようにになっているのであろうか．分布定数モデルを用いて考察してみる．

図 6 は，半波長分布定数線路で構成した透過型共振回路を示す．左端に電圧 V_g ，内部抵抗 Z_L の信号源を巻き数比 1 : n_1 の理想変圧器を介して接続し，右端に負荷 Z_R を巻き数比 n_2 : 1 の理想変圧器を介して接続する．両端に接続された信号源と負荷のインピーダンスを共振器内部から見ても，信号源—共振器—負荷の結合がある限り，それらはゼロや無限大とはならない．

線路左端における境界条件から，

$$n_1 V_g - n_1^2 Z_L \left(\frac{V_i}{Z_c} - \frac{V_r}{Z_c} \right) = V_i + V_r \quad (26)$$

の関係を得，線路右端の境界条件から，

$$\frac{n_2^2 Z_R}{Z_c} (V_i - V_r) = V_i + V_r \quad (27)$$

の関係を得るので，例えば，式(9)における前進波電圧振幅 V_i ，後進波電圧振幅 V_r は，それぞれ

$$V_i = \frac{\xi_1 (1 + \xi_2)}{2(\xi_1 + \xi_2)} n_1 V_g \quad (28)$$

$$V_r = \frac{\xi_1 (1 - \xi_2)}{2(\xi_1 + \xi_2)} n_1 V_g \quad (29)$$

で与えられる．ただし，

$$\xi_1 = \frac{Z_c}{n_1^2 Z_L}, \quad \xi_2 = \frac{Z_c}{n_2^2 Z_R} \quad (30)$$

式(28)，(29)を式(9)に代入して，電圧分布を求めると，

$$v(z) = \frac{n_1 V_g \xi_1}{2(\xi_1 + \xi_2)} (2 \cos \beta z - j 2 \xi_2 \sin \beta z) \quad (31)$$

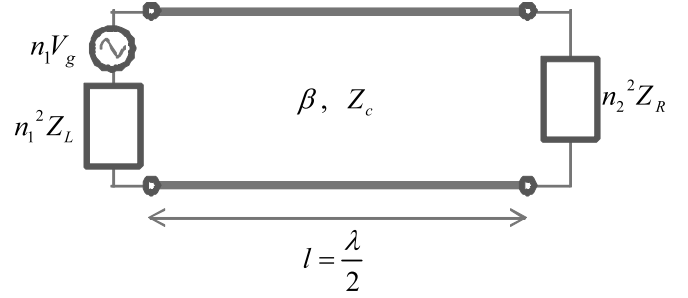


図 6 信号源と負荷を付与した半波長線路共振器

と，式(11)と同形の式を得る．従って，図 6 の共振器内部では，両端が開放となる共振モード v_{open} と短絡となるモード v_{short} が同時に存在すると解釈できる．両モードの電圧分布を計算すると，

$$v_{open}(z, t) = \frac{n_1 V_g \xi_1}{(\xi_1 + \xi_2)} \cos \beta z e^{j\omega t} \quad (32)$$

$$v_{short}(z, t) = -j \frac{n_1 V_g \xi_1 \xi_2}{(\xi_1 + \xi_2)} \sin \beta z e^{j\omega t} \quad (33)$$

電流分布についても同様に次式を得る．

$$i_{open}(z, t) = -j \frac{1}{Z_c} \frac{n_1 V_g \xi_1}{(\xi_1 + \xi_2)} \sin \beta z e^{j\omega t} \quad (34)$$

$$i_{short}(z, t) = \frac{1}{Z_c} \frac{n_1 V_g \xi_1 \xi_2}{(\xi_1 + \xi_2)} \cos \beta z e^{j\omega t} \quad (35)$$

それぞれのモードの電圧と電流は，やはり時間的，空間的に直交しているので，各モード単独ではエネルギーの移送に寄与しない．しかし，両端開放モードの電圧と両端短絡モードの電流，および両端開放モードの電流と両端短絡モードの電圧は直交しておらず，エネルギーの移送に寄与する．これらはそれぞれ以下のよう計算される．

・開放モードの電圧と短絡モードの電流によるもの
(複素ポインティングベクトルの実部)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ v_{open}(z, t) \cdot i_{short}^*(z, t) \} \\ &= \frac{1}{4Z_c} \left(\frac{n_1 V_g \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \right)^2 \xi_2 (\cos 2\beta z + 1) \end{aligned} \quad (36)$$

(瞬時ポインティングベクトル)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ v_{open}(z, t) \} \cdot \operatorname{Re} \{ i_{short}(z, t) \} \\ &= \frac{1}{4Z_c} \left(\frac{n_1 V_g \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \right)^2 \xi_2 (\cos 2\beta z + 1) (\cos 2\omega t + 1) \end{aligned} \quad (37)$$

・短絡モードの電圧と開放モードの電流によるもの
(複素ポインティングベクトルの実部)

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{v_{short}(z,t) \cdot i_{open}^*(z,t)\} \\ = \frac{1}{4Z_c} \left(\frac{n_1 V_g \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \right)^2 \xi_2 (1 - \cos 2\beta z) \quad (38)$$

(瞬時ポインティングベクトル) (39)

$$\operatorname{Re}\{v_{short}(z,t)\} \cdot \operatorname{Re}\{i_{open}(z,t)\} \\ = \frac{1}{4Z_c} \left(\frac{n_1 V_g \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \right)^2 \xi_2 (1 - \cos 2\beta z) (\cos 2\omega t + 1)$$

これらを計算し図示すると図7の様になる。式(37)と式(39)による瞬時値の分布は、空間的に位相が90度ずれているが時間的には同相で、それらの和は線路内で一定となる。そしてそれらの時間平均値は、線路内の総合電圧および電流から計算した複素ポインティングベクトルの実部に一致する。

すなわち、実際の共振回路において、入力側から出力側へ電力を移送するメカニズムは、共振器内電磁界を、入力端および出力端がそれぞれ開放となるモードと短絡のモードに分け、2つのモードの相互作用を考慮することによって説明され得る。

共振器を配列接続したフィルタ回路においても、構成要素である一つ一つの共振器に着目すると、共振器から外部に隣接する回路のインピーダンスを、改めて図6のように置くことができるので、同様の考察が行える。

また、マイクロストリップ線路共振器の端部放射や一般の2端子対回路における電力伝送にも、この種の考察は非常に有用であり、マイクロ波回路の動作メカニズムを考察する上で、是非おさえておきたいポイントといえる[5]。

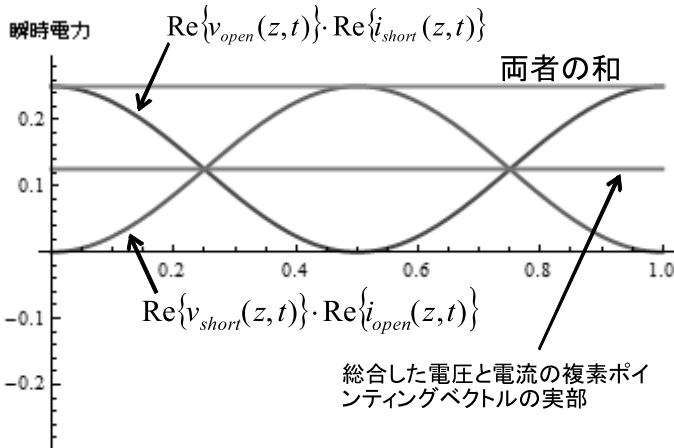


図7 透過型半波長線路共振器の電力流の計算例

IV. 方向性結合器の考察

方向性結合器は、マイクロ波信号を分配、合成するためのキーデバイスとして広く用いられる[6]。この回路の特性も分布定数線路モデルにより、近似的に計算することができる。複雑な電磁界解析あるいは電磁界シミュレーションを行う前の、予備計算として有用であろう。

まず、図8のようなマイクロストリップ分布結合型結合器を考える。2本のマイクロストリップ線路の区間1の部分に近接させ電磁結合させる。分布定数線路モデルを用いると、この結合部分の微小区間は図9の回路で表現される。図1(b)に示した2本の線路の微小区間が、磁氣的、電氣的に結合している。

この微小区間の各端子の電圧、電流はF行列を用いて次式の関係を持つ。

$$F = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y_1 + \omega^2 M C_M & Z_1 & -j(Y_2 \omega M - Z_1 \omega C_M) & -j\omega M \\ Y_1 & 1 & j\omega C_M & 0 \\ -j(Y_1 \omega M - Z_2 \omega C_M) & -j\omega M & 1 + Z_2 Y_2 + \omega^2 M C_M & Z_2 \\ j\omega C_M & 0 & Y_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

ただし、

$$Z_1 = (R_1 + j\omega L_1) dz, \quad (41)$$

$$Y_1 = (G_1 + j\omega C_1) dz \quad (42)$$

は Port#1-Port#2 間の分布定数線路モデルのシリーズインピーダンスおよびシャントアドミタンスである(図1(b)の R, L, C, G に対応)。 Z_2, Y_2 についても同様である。また、 M は線路間の磁気結合相互インダクタンス、 C_M は電気結合相互キャパシタンスである。

結合部分全体のF行列は、式(40)で与えられたものを、 l/dz 乗したものであるので、結合部分全体の回路特性は次式で計算される。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [F] \frac{l}{dz} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \\ V_4 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

図10は、式(40)のF行列をS行列に変換して計算した、分布結合型結合器の伝送特性の一例を示す。結合部分の長さ l を変えて、ポート#1に入力された信号が、各ポートにどれほど伝わるかを計算している。長さ l が、いわゆる完全結合長に等しいとき、ポート#1からの入力信号は、完全に対向する線路に乗り移ることが確認できる。

次に、図11の2結合素子型方向性結合器[6]を、分布定数線路モデルを用いて考察する。導波管など2本の線路を平行に配置し、管壁に1/4もしくはその奇数倍の間隔で開けた結合孔を介して両者を結合させた構造である。図11は、2孔タイプであるが、強い結合度

を広い周波数帯域で得るために、多孔化したものも良く用いられる。この結合器を分布定数線路モデルで表現すると、図12の等価回路を得る。この等価回路を用いて、2結合素子型方向性結合器の伝送特性を計算することは、比較的簡単である。図13に、計算結果の一例を示す。ポート#1あるいはポート#2から入力された信号がそれぞれポート#3あるいはポート#4へ分配されることが分る。

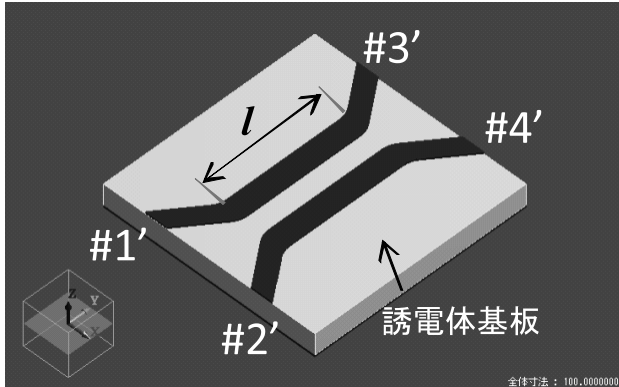


図8 マイクロストリップ分布結合型結合器

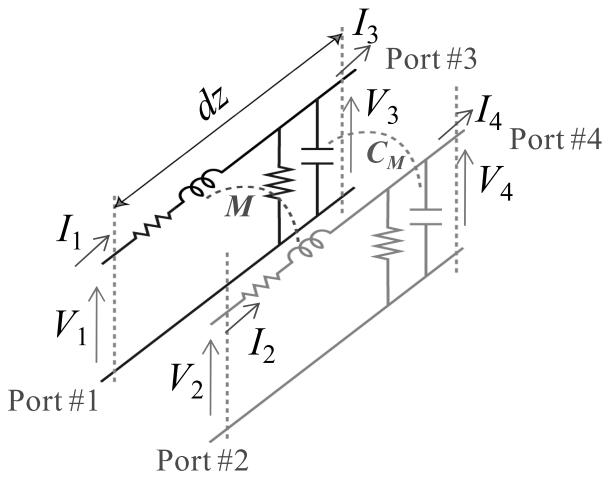


図9 結合部の微小区間の等価回路 (結合分布定数線路モデル)

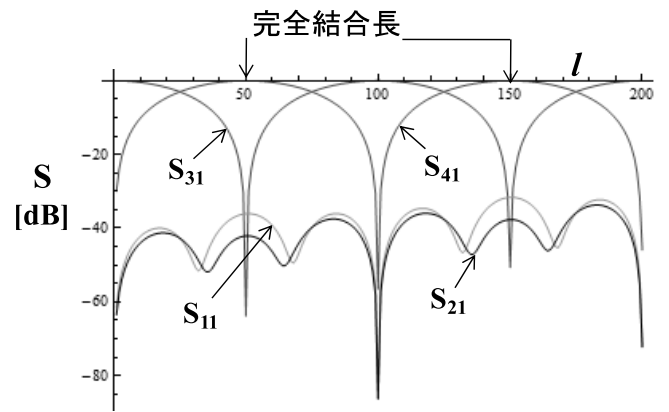


図10 結合分布定数線路モデルによる分布結合型結合器の伝送特性の計算例

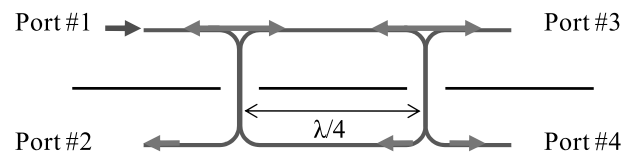


図11 2結合素子型方向性結合器

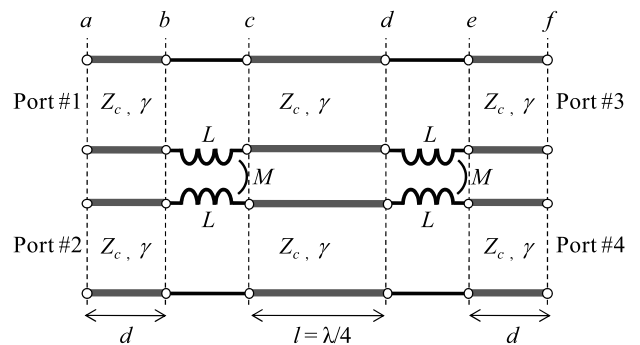


図12 2結合素子型方向性結合器の分布定数線路モデルによる表現

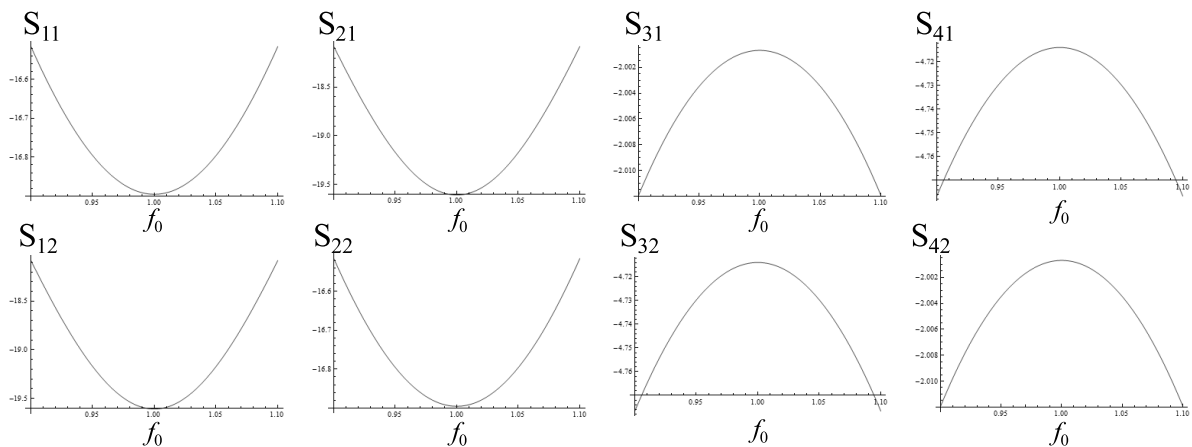


図13 分布定数線路モデルによる2結合素子型方向性結合器の伝送特性の計算例

V. 左手系メタマテリアル回路の考察

最近、通信分野においても左手系メタマテリアル回路に関する研究が活発に行われている[7]。メタマテリアルの応用研究は、それ自体大変魅力的で夢のある研究テーマであるが、マイクロ波工学の初学者にとっても、その伝送特性の原理的考察を行うことは非常に意味のあることだと、筆者は考える。本節では分布定数線路モデルを用いて、理想左手系線路や右手/左手系複合(CRLH)線路の伝送特性を考察する[8][9]。

A. 理想左手系線路[10]

図1(b)の分布定数線路モデルにおいて、損失を表す R 、 G をゼロとし、直列のインダクタ Ldz を容量 C'/dz に、並列の容量 Cdz をインダクタ L'/dz に入れ替えた回路、図14を考える。このとき、 L' および C' の単位はそれぞれ $\text{H}\cdot\text{m}$ および $\text{F}\cdot\text{m}$ でなければならないことに注意が必要である。微小区間 dz がこの等価回路で表される分布定数線路は、理想左手系線路と呼ばれる。この微小区間 dz に対して、

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{j\omega C'} I \quad (44)$$

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{1}{j\omega L'} V \quad (45)$$

が成り立つので、式(1)および(2)と同形の微分方程式が得られるが、ただし、伝搬定数は

$$\gamma = -\sqrt{\left(\frac{1}{j\omega C'}\right)\left(\frac{1}{j\omega L'}\right)} = -j\frac{1}{\omega\sqrt{L'C'}} \quad (46)$$

となる。上式右辺は $+z$ 方向に伝搬する波の因果律より負の符号となる。すなわち、位相定数 β は、

$$\beta = -\frac{1}{\omega\sqrt{L'C'}} \quad (47)$$

また特性インピーダンス Z_c は、式(14)からの類推により、

$$Z_c = \sqrt{\frac{1/j\omega C'}{1/j\omega L'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (48)$$

となる。

誘電率 ε 、透磁率 μ の均質媒質中を伝搬する平面波は、次式、

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (49)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (50)$$

で与えられる位相定数 β 、電波インピーダンス η をもつ。

ε 、 μ について解けば、

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega\eta} \beta \quad (51)$$

$$\mu = \frac{1}{\omega} \beta \eta \quad (52)$$

上式の β および η として、式(47)、(49)の β および Z_c を用い、 ε 、 μ を、線路の実効的な誘電率、透磁率として計算すれば、

$$\varepsilon = -\frac{1}{\omega^2 L'} \quad (53)$$

$$\mu = -\frac{1}{\omega^2 C'} \quad (54)$$

となり、両者は負となることがわかる。

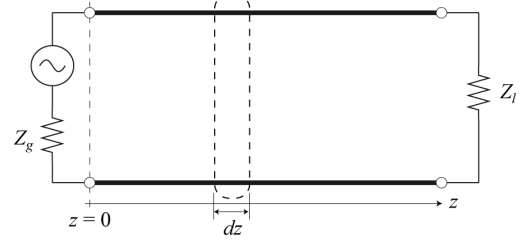
位相速度 v_p と群速度 v_g は、それぞれ

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = -\omega^2 \sqrt{L'C'} \quad (55)$$

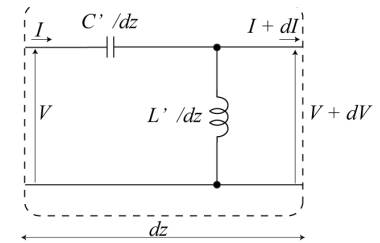
$$v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \omega^2 \sqrt{L'C'} \quad (56)$$

となり、両者の絶対値は等しいが、符号は異なることがわかる。これにより、この線路中では、位相速度と群速度とが反平行となるバックワード波が伝搬することがわかる。

理想左手系線路は、左手系線路中の伝搬の様子を明解に示すが、一方で現実的でない部分もある。例えば、直列の容量 $C'\Delta z$ および並列のインダクタンス $L'\Delta z$ を有限な値に保ったまま $\Delta z \rightarrow 0$ とすることは現実には難しい。また、群速度は式(56)によると ω が大きくなると徐々に大きくなり、光速を越えていくだけでも大きくなってしまふ。この矛盾は、物理的な大きさを持つ実際の微小区間には存在すべき、直列の寄生インダクタンス成分および並列の寄生容量成分を無視したために起こる。これを解消するため次に述べる右手/左手系複合線路モデルが提案されている。



(a) 分布定数線路



(b) 微小区間 dz の等価回路

図14 理想左手系線路の分布定数線路モデル

B. 右手/左手系複合(CRLH)線路

図15の回路を区間 a とし、その区間が周期的に続く分布定数線路モデルを考える。この線路は理想左手系線路に右手系の要素を導入したもので、右手/左手系複合(CRLH)線路[11]-[13]と呼ばれる。この線路の実効的な誘電率および透磁率を前節と同様に求めると、

$$\varepsilon = C'_R - \frac{1}{\omega^2 L'_L} \quad (57)$$

$$\mu = L'_R - \frac{1}{\omega^2 C'_L} \quad (58)$$

となる。この場合、 ε および μ の正負は角周波数により変化する。以下、この右手/左手系複合(CRLH)線路の分布定数線路モデルに対する、伝搬定数と特性インピーダンスを求める。ただし、図15では区間 a は、図1に対する考察のように $dz \rightarrow 0$ の極限をとれない有限の長さなので、II節と同様の考察はできない。

CRLH線路を、この区間 a の単位セルが連続する周期構造であるとする。単位セルの両端の電圧 V_n, V_{n+1} および電流 I_n, I_{n+1} をF行列を用いて表すと、

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

いま、各端子における電圧波および電流波に対して、ブロッホ・フロケの周期境界条件[14][15]

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = e^{j\alpha} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \quad (60)$$

を課すと、

$$\begin{bmatrix} A - e^{j\alpha} & B \\ C & D - e^{j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (61)$$

を得る。ここで V_{n+1} および I_{n+1} が自明でない解を持つためには、右辺の行列の行列式が零でなければならない。すなわち、

$$\det \begin{bmatrix} A - e^{j\alpha} & B \\ C & D - e^{j\alpha} \end{bmatrix} = 0 \quad (62)$$

を得る。また、回路が可逆である場合には $AD \cdot BC = 1$ が成り立つことを考慮すれば、

$$\cosh j\alpha = \frac{A + D}{2} \quad (63)$$

を得る。これが周期構造中の波の分散関係を与える。

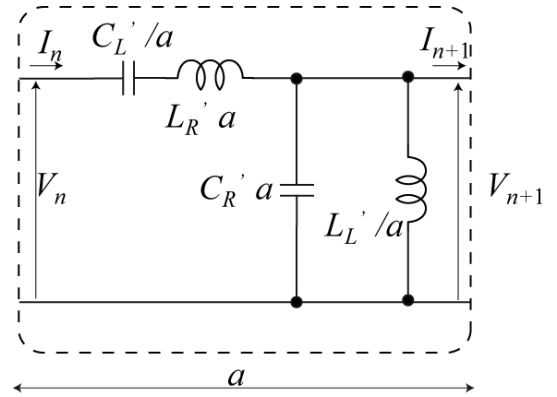


図15 右手/左手系複合(CRLH)線路の周期構造線路モデル

一方、本周期構造の各端子上の電圧と電流の比で定義される特性インピーダンスを考える。これは固体中の弾性波との類推によりブロッホインピーダンスとも呼ばれている[15]。ブロッホインピーダンスは、端子面における電圧と電流の比を計算すると次式の様になる。

$$Z_B^\pm = \frac{-2B}{A - D \mp \sqrt{(A+D)^2 - 4}} \quad (64)$$

上式の複号は z 軸の正または負に伝搬する波に対するものである。 Z_B は周期構造の各端子面において同じ値をとるが、単位セルの取り方により変化し、一様な線路の場合の様に一意的には決まらない。

図15の分布定数線路モデルを単位周期にもつCRLH線路の位相定数およびブロッホインピーダンスは、

$$A = 1 + \left(\frac{a}{j\omega C'_L} + j\omega L'_R a \right) \left(j\omega C'_R a + \frac{a}{j\omega L'_L} \right) \quad (65)$$

$$B = \frac{a}{j\omega C'_L} + j\omega L'_R a \quad (66)$$

$$C = j\omega C'_R a + \frac{a}{j\omega L'_L} \quad (67)$$

$$D = 1 \quad (68)$$

であることから、式(63)および(64)より、

$$\beta = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\omega L'_R - \frac{1}{\omega C'_L} \right) \left(\omega L'_L - \frac{1}{\omega C'_R} \right) \right] \quad (69)$$

$$Z_B = Z_L \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{\omega_{se}^2} - 1}{\frac{\omega^2}{\omega_{sh}^2} - 1} - \frac{\omega_L^2}{4\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_{se}^2} - 1 \right)^2} \quad (70)$$

を得る. ここで, $\omega_L, \omega_R, \omega_{se}, \omega_{sh}$ および Z_L は

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{L_L C_L}}, \quad \omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_R C_R}}, \quad (71)$$

$$\omega_{se} = \frac{1}{\sqrt{L_R C_L}}, \quad \omega_{sh} = \frac{1}{\sqrt{L_L C_R}}$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}} \quad (72)$$

である. また, C_L, L_L, C_R および L_R は, 単位セル中の素子値で,

$$C_L = C'_L / a, \quad L_L = L'_L / a \quad (73)$$

$$C_R = C'_R a, \quad L_R = L'_R a \quad (74)$$

で与えられる.

典型的な素子値に対して式(69)の分散関係を示せば図16の様になる. 図16の横軸の Γ および X はブリルアンゾーンの高対称点で, それぞれ $k=0$ および $k=\pi a$ なる点を表している. ω - β ダイアグラム上の点に対して, 原点から引いた線の傾きが位相速度 v_p に, また曲線の微係数が群速度 v_g に対応することを考慮すれば, 同図から, 角周波数が ω_{XL} から ω_{TL} の範囲にある最低次のモードの v_p と v_g の符号は異なり, 左手系の波が伝搬することがわかる. また, 角周波数が ω_{TR} から ω_{XR} の範囲では v_p と v_g の符号が等しく, 右手系のモードの波が伝搬する. さらに, ω_{TL} から ω_{TR} の範囲ではバンドギャップが存在する. バンドギャップの範囲では伝搬定数が純実数となり波は伝搬しない.

いま, 特別な場合として $\omega_{TL} = \omega_{TR}$ の場合には, 分散特性は同図(b)の様になり, バンドギャップは消失する. この線路はバランス型CRLH線路と呼ばれ, 実用上有利となる.

Γ 点角周波数は, 式(69)の分散関係式において $\beta=0$ とすることで,

$$\omega_{TL} = \min(\omega_{se}, \omega_{sh}) \quad (75)$$

$$\omega_{TR} = \max(\omega_{se}, \omega_{sh}) \quad (76)$$

と得られる. すなわち, 図15の単位セルの等価回路において, 直列ブランチの共振角周波数と並列ブランチの共振角周波数が Γ 点の角周波数を決める.

また, X 点角周波数は, 同様に式(69)において $\beta=\pi a$ とすることで,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{XL}^2 \\ \omega_{XR}^2 \end{aligned} \right\} = \frac{\omega_{se}^2 + \omega_{sh}^2}{2} + 2\omega_R^2$$

$$\mp \left\{ \left(\frac{\omega_{se}^2 + \omega_{sh}^2}{2} + 2\omega_R^2 \right)^2 - \omega_{se}^2 \omega_{sh}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

と得られる.

式(70)のブロッホインピーダンスを図示すれば図17の様になる. ブロッホインピーダンスは, $\omega_{se} < \omega_{sh}$ および $\omega_{se} > \omega_{sh}$ の場合においてそれぞれ同図(a)の実線および波線の様に変化する. いずれの場合においてもバンドギャップの下限界角周波数 ω_{TL} および上限界角周波数 ω_{TR} において零若しくは無限大となる.

一方, $\omega_{TL} = \omega_{TR} (\equiv \omega_T)$ のバランス型CRLH線路の場合には, ブロッホインピーダンスは同図(b)の様に ω_T において連続的かつその角周波数近傍において変化が少なくなる. つまり, バランス型CRLH線路では Γ 点近傍で広帯域に整合が可能であることを示している.

いま, 式(69)より位相速度 v_p および群速度 v_g は

$$v_p = \frac{1}{a\omega} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\omega L_R - \frac{1}{\omega C_L} \right) \left(\omega L_L - \frac{1}{\omega C_R} \right) \right] \quad (78)$$

$$v_g = - \frac{a \sin \beta a}{\frac{1}{\omega^3 L_L C_L} - \omega L_R C_R} \quad (79)$$

で与えられる.

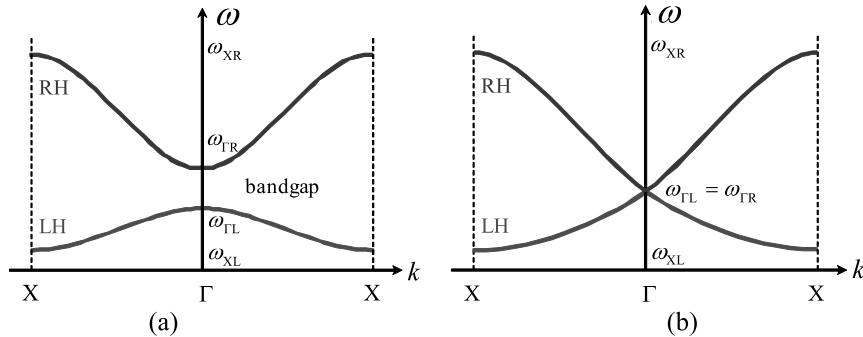


図16 CRLH線路の分散特性. (a) アンバランス型. (b) バランス型.

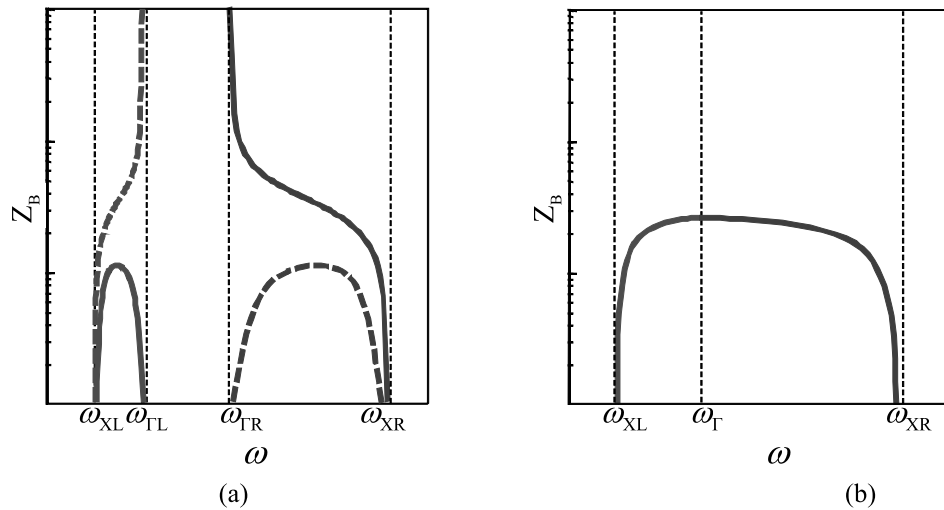


図 17 CRLH 線路のブロッホインピーダンス. (a) アンバランス型. (b) バランス型.

VI. まとめ

分布定数線路モデルを用いて、共振器・フィルタ、方向性結合器・分配器、左手系メタマテリアル回路など、マイクロ波工学において押さえておくべき、いくつかの基本回路について考察した。実際の電磁界による電波伝搬と回路論的取扱いの対応性に注意すれば、分布定数線路モデルは有用なツールとなり得る。実際の設計現場においても、最近発達が目覚ましい電磁界シミュレータと併用すれば、多くの設計上の課題を克服できるのではと、筆者は考える。

参考文献

- [1] 関根, 雨谷, “分布定数回路理論,” コロナ社, Feb. 1990.
- [2] 中島将光, “マイクロ波工学 基礎と原理”, 森北出版, 1975.
- [3] 小西, “マイクロ波技術講座 理論と実際,” 日刊工業新聞社, 第1巻, Feb. 2001.
- [4] 小西, “マイクロ波回路の基礎とその応用,” 総合電子出版, pp.47-48, Aug. 1990.
- [5] 石川, “磁気ヨーク型トランスにおける電力伝送のマイクロ波的アプローチ,” 信学論(C), J93-C, no. 12, Dec. 2010.
- [6] 太田, “方向性結合器/3dB ハイブリッド設計の基本的な考え方”, 信学技報マイクロ波, MW2007-184, pp. 85-90, Feb. 2008.
- [7] 真田, “通信応用のための左手系メタマテリアル技術,” 信学会誌, 93 巻, 6 号, pp.440-445, June 2010.
- [8] 上田, “非相反性メタマテリアル技術と通信応用,” 信学会誌, 93 巻, 6 号, pp.446-451, June 2010.
- [9] 石原, 真田 他, “メタマテリアル—最新技術と応用—”, シーエムシー出版, Nov. 2007.
- [10] A. Sanada, C. Caloz, and T. Itoh, “Characteristics of the Composite Right/Left-Handed Transmission Lines,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, Vol. 14, No.2, pp. 68-70, Feb. 2004.
- [11] A. Sanada, C. Caloz and T. Itoh, “Planar distributed structures with negative refractive index,” *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 52, No. 4, pp. 1252-1263, April 2004.
- [12] A. Lai, C. Caloz and T. Itoh, “Composite right/left-handed transmission line metamaterials,” *IEEE Microwave Magazine*, vol. 5, no. 3, pp. 34-50, September 2004
- [13] C. Caloz and T. Itoh, “Electromagnetic metamaterials,” *John Wiley & Sons*, New York, 2005.
- [14] R. E. Collin, “Foundations for microwave engineering, second ed.,” *McGraw Hill*, 1992.
- [15] D. M. Pozar, “Microwave engineering, second ed.,” *John Wiley & Sons*, New York, 1998