

# マイクロ波伝送理論

- 入門から応用まで -

## Microwave Transmission Theory

-Fundamentals and Applications-

米山 務  
Tsukasa Yoneyama

東北工業大学  
Tohoku Institute of Technology

982-0846 仙台市太白区二ツ沢 6  
Futatsuzawa 6, Taihaku-ku, Sendai, 982-0846 Japan

Understanding of the microwave transmission line theory is essential to every microwave engineer. This lecture starts with the derivation, solution and interpretation of the transmission line equations, and then moves on the practical usage of the Smith chart. The scattering matrix and the LH metamaterials are also chosen as lecture topics since they play an important role in microwave engineering.

### 1. まえがき

大学の教養部時代、高校レベルをはるかに超える科目がカリキュラムに並んでいたが、それでも想像の域を超えるものではなかった。その中で例外は電気回路であった。高校時代は、受験参考書の1ページに、直列回路に関する微積分方程式の記載があったのを僅かに記憶しているだけであるが、大学は違った。虚数単位“ $j$ ”を導入するだけで、複雑な回路が難なく解け、知的興奮を覚えた。その延長に本日のテーマ“分布定数線路”がある。

複素平面上で表現されるインピーダンスを有限の範囲に納め、図式解法を可能にしたいという願望が、日米両国で時を同じくしてスミス図表を生んだ。コンパス1つで伝送線路の図式計算ができる便利さはPC隆盛前は重宝された。

また、電圧と電流の2つの量で記述される伝送理論を、複素振幅という単一量で書き換えた結果、散乱行列が導入され、伝送回路の諸問題を巧みに議論できるようになった。

さらに、最近大いに注目されている話題にメタマテリアル(左手系媒質)がある。メタマテリアルの世界は、現実の世界に対する共役の世界ともいえる。

上述のように、本講座は、伝送線路理論とその関連事項をイメージし易い形で展開すると共に、最近ともするとデジタルに押されがちな本分野の再興を目指すものである。

### 2. 伝送線路の基礎 [ 1 ]

#### 2.1 伝送線路と1次定数

図1は分布定数線路である。以後述べることは平行2本線路、同軸線路など、いわゆるTEMモード伝送線路に対して成り立つのは無論、マイクロストリップ線路、コプレーナ線路など準TEMモード伝送線路に対しても十分高い近似度をもって成り立つ。

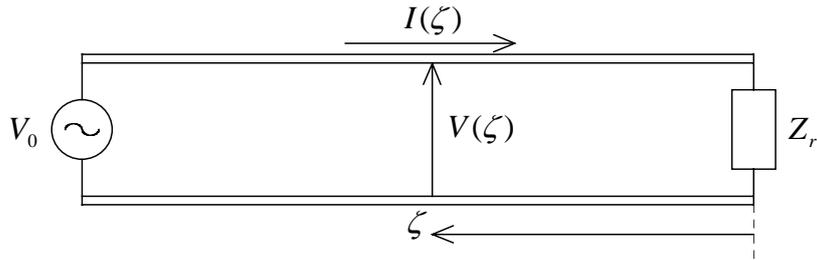


図1 分布定数線路

平行2本線路は単純な銅線であるが、電磁波的に見ると銅線には単位長さ当り  $L(\text{H/m})$  のインダクタンスが分布し、銅線間には単位長さ当り  $C(\text{F/m})$  の容量が分布している。さらに詳細に見ると銅線には抵抗  $R(\text{Ω/m})$ 、銅線間にはコンダクタンス  $G(\text{S/m})$  が分布し、伝送損の要因となっている。ここで挙げた回路定数  $L, C, R, G$ 、あるいはこれらを組み合わせた

$$Z = R + j\omega L \tag{1a}$$

$$Y = G + j\omega C \tag{1b}$$

を伝送線路の1次定数と呼び、等価回路表示すると図2(a)のようになる。

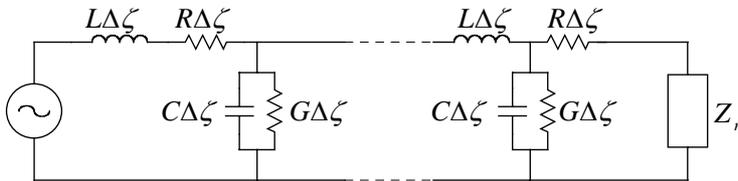


図2(a) 分布定数線路の等価回路表示

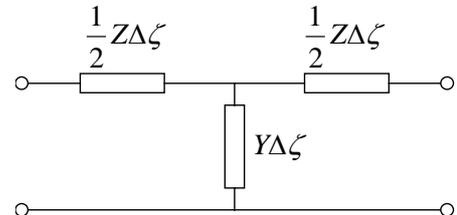


図2(b) 微少区間の等価回路表示

## 2.2 伝送方程式の解と2次定数

図2(a)の回路は、このままでは手に負えないが、ここから微少区間を取り出し図2(b)のT型回路で表示すると何とかなる。すなわち、この回路を高次無限小の項を無視して解き、さらに  $\Delta\zeta \rightarrow 0$  とすると、次の連立微分方程式が導かれる。

$$\frac{dV(\zeta)}{d\zeta} = -ZI(\zeta) \tag{2a}$$

$$\frac{dI(\zeta)}{d\zeta} = -YV(\zeta) \tag{2b}$$

上式は容易に解くことができ、一般解はつぎのようになる。

$$V(\zeta) = V_1 e^{\gamma\zeta} + V_2 e^{-\gamma\zeta} \tag{3a}$$

$$I(\zeta) = \frac{V_1 e^{\gamma\zeta} - V_2 e^{-\gamma\zeta}}{Z_c} \tag{3b}$$

ただし、

$$\gamma = \sqrt{ZY} \tag{4a}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \tag{4b}$$

であり、任意定数  $V_1, V_2$  は回路条件によって決定される。また、 $\gamma, Z_c$  を線路の2次定数といい、前出の1次定数は2次定数に全て含まれ、以後、陽に表れることはない。

### 2.3 2次定数の物理的意味

簡単のため、式(1a),(1b)において、抵抗R、コンダクタンスGは無視出来る程度に小さいとする。この仮定は、高周波帯では充分成り立つものであり、このとき式(4a)の  $\gamma$  は虚数、式(4b)の  $Z_c$  は実数となり、それぞれ次式で与えられる。

$$\gamma = j\beta, \quad \text{ただし} \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (5a)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5b)$$

ここで、伝送線路理論で、しばしばに出会う表現  $e^{-j\beta\zeta}$  について考える。電気工学の常で、この式は、角周波数とし、 $e^{j\omega t}$  を掛け、実数部を取って初めて意味を持つ。即ち、実体は

$$\text{Re}(e^{j(\omega t - \beta\zeta)}) = \cos(\omega t - \beta\zeta) \quad (6)$$

である。

上式の余弦関数は、時間  $t$  と場所  $\zeta$  の関数として移動し、その速度  $v_p$  は

$$\omega t - \beta\zeta = \text{const.} \quad (7)$$

を時間  $t$  で微分し、

$$\omega - \beta\left(\frac{d\zeta}{dt}\right) = 0 \quad \text{即ち} \quad v_p\left(\frac{d\zeta}{dt}\right) = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8)$$

と求まる。なお、上式の数値  $v_p$  は、余弦関数の位相を微分して求められるので、位相速度とよばれ、これに対応して  $\beta$  は位相定数、 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  は伝搬定数とよばれる。なお、伝送波の速度には、このほか波形伝送に関連した群速度  $v_g$  があり、次式で計算される。たまたま、本例の場合、位相速度と群速度は一致する。

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9)$$

一方、伝送波が  $e^{j\beta\zeta}$  と表される場合、位相速度は

$$v_p = -\frac{\omega}{\beta} \quad (10)$$

となり、負となる。これは  $\zeta$  の負方向に伝わる波動を意味する。また、位相定数を

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (11)$$

と変形し、 $\lambda_g (=v_p/f)$  を導波波長とも言う。物理的には、1周期間に波動が進む距離を表す。

つぎに、もう一方の2次定数  $Z_c$  について考える。式(3a),(3b)の第1項で表される電圧、電流は、図1の座標系の場合、 $\zeta$  の負方向に進む波、すなわち終端負荷に向かう入射波を意味し、その比  $Z_c$  は伝送線路固有のもので、特性インピーダンスと呼ばれる。同様に、第2項は  $\zeta$  の正方向に進む波動、すなわち反射波を表し、やはり特性インピーダンスが定義できる。以上の考察から、特性インピーダンスの一般的な定義は次のようになる。

$$Z_c = \frac{\text{ある方向に進む電圧波の振幅}}{\text{同じ方向に進む電流波の振幅}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12)$$

なお、式(3b)第2項の負号は、図1で座標  $\zeta$  と電流の向きが互いに逆になることに起因する。

### 2.4 反射係数、定在波比、入力インピーダンス

議論をもう少し具体化するため、図1に示すように、伝送線路をインピーダンス  $Z_r$  で終端した場合について考える。すなわち、式(3a),(3b)で  $\zeta=0$  とおけば

$$V_r = V_1 + V_2 \quad (13a)$$

$$I_r = \frac{V_r}{Z_r} = \frac{V_1 - V_2}{Z_c} \quad (13b)$$

が得られ、これを解いて  $V_1, V_2$  は、それぞれ、つぎのように導かれる。

$$V_{1,2} = \left(\frac{V_r}{2}\right) \left(1 \pm \frac{Z_c}{Z_r}\right) \quad (14)$$

これを式(3a),(3b)に代入すると、伝送線路上の電圧、電流は以下のように求められる。

$$V(\zeta) = \left(\frac{V_r}{2}\right) \left(1 + \frac{Z_c}{Z_r}\right) e^{\gamma\zeta} + \left(\frac{V_r}{2}\right) \left(1 - \frac{Z_c}{Z_r}\right) e^{-\gamma\zeta} \quad (15a)$$

$$I(\zeta) = \left(\frac{V_r}{2Z_c}\right) \left(1 + \frac{Z_c}{Z_r}\right) e^{\gamma\zeta} - \left(\frac{V_r}{2Z_c}\right) \left(1 - \frac{Z_c}{Z_r}\right) e^{-\gamma\zeta} \quad (15b)$$

上式から種々の特性量に対する表現式が誘導される。

(1)反射係数： 反射係数は反射波と入射波の振幅比として式(14)から容易に計算できる。しかし、反射係数を電圧で定義するか、電流で定義するかによって符号が異なる。特に断らない限り反射係数は電圧で定義する約束になっていて、次式で与えられる。

$$\Gamma = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{z_r - 1}{z_r + 1} \quad (16)$$

ただし、

$$z_r = \frac{Z_r}{Z_c} \quad (17)$$

は負荷インピーダンスと特性インピーダンスの比で、正規化インピーダンスと呼ばれる無名数である。

(2) 定在波比S： 無損失線路(  $\alpha = 0$  )を仮定すると、式(3a)より、次式が得られる。

$$|V(\zeta)| = |V_1| \cdot |1 + \Gamma e^{-j2\beta\zeta}| \quad (18)$$

絶対値は振幅を表し、測定可能な量である。特に、振幅の最大値と最小値の比 S を定在波比といい、次式で与えられる。

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (19)$$

時には、定在波比 S を測定し、次式により反射係数の大きさ  $|\Gamma|$  を求めることもある。

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (20)$$

(3) 入力インピーダンス $Z_{in}(\zeta)$ ： 伝送線路の入力端から負荷側を見たインピーダンス $Z_{in}(\zeta)$ を入力インピーダンスといい、式(15a),(15b)を用いて、次のように求められる。

$$\frac{Z_{in}(\zeta)}{Z_c} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta\zeta}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta\zeta}} \quad (21)$$

入力インピーダンスは負荷の反射係数 および観測点と負荷の間の距離 によって変わる。以上述べた反射係数、定在波比、入力インピーダンスは、次に説明するスミス図表に関連して特に重要である。

### 3. スミス図表およびその利用

#### 3.1 スミス図表の原理

伝送線路の計算では、インピーダンスから反射係数を求めたり、あるいはその逆の計算が頻繁に必要なになる。これを図式的に処理できれば便利である。スミス図表はそのような要求に応え、先の世界大戦中、スミス(米国)、水橋(日本)両氏により独立に考案されたものである。

インピーダンスの図式解法での困難は、インピーダンスが無限大になる場合があることである。これを解消するには、インピーダンスに代って反射係数を用いればよい。反射係数の大きさは決して 1 以上にはならず、有限の範囲に収まるからである。

ところで、正規化インピーダンスと反射係数の間には式(21)が成り立つ。この式を

$$w = \Gamma e^{-j2\beta\zeta} = \Gamma e^{-j4\pi\zeta/\lambda_g} \quad (22a)$$

$$z = \frac{Z_{in}}{Z_c} \quad (22b)$$

とにおいて  $w$  について書き換えれば

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (23)$$

となる。ただし、式(22a)では導波波長の表示式(11)を用いている。上式は1次変換の式で、 $z$ -plane 上の円(半径無限大の円として直線を含む)を  $w$ -plane 上の円(同様に直線を含む)に、等角性を保持したまま写像(変換)するという興味ある性質がある。

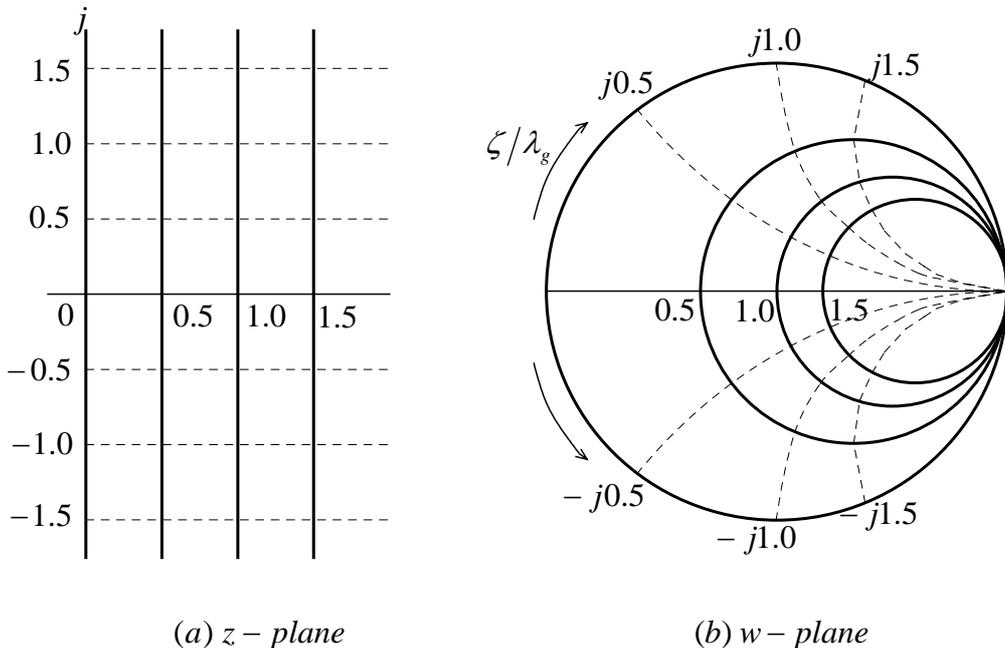


図3 スミス図表の構成

式(23)を利用して、図3(a)に示す  $z$ -plane 上の抵抗一定の直線(半径無限大の円)を  $w$ -plane に写像すると図3(b)に実線で示すような円群になる。一方、リアクタンス一定の直線も  $w$ -plane 上では点線で示す部分円になる。要するに、スミス図表とは式(23)を利用して、インピーダンス面上の正抵抗領域 [  $\text{Re}(z) > 0$  ] を  $w$ -plane 上の半径1の円内に写像したものである。

一方、反射係数  $w$  の位相は観測点の位置によって変わる。それは式(22a)の指数関数部を見れば明らかであり、反射係数  $w$  は周期  $\lambda_g/2$  の関数である。このことをスミス図表上では円の外周に  $\zeta/\lambda_g$  を目盛って表している。ある観測点から電源側に移動する時は + 方向 ( Toward Generator ) に回り、反対に線路上を負荷側に移動する時は - 方向 ( Toward Load ) に回ればよい。いずれの場合も  $\zeta/\lambda_g = 0.5$  で一周するように目盛られている。

スミス図表について、もう1つの重要な量は式(19)で定義される電圧定在波比  $S$  である。この量は容易に測定可能であるばかりでなく、式(21)と比較すると分るように  $\Gamma e^{-j2\beta\zeta}$  が正の実数のときの正規化抵抗でもある。従って、定在波比  $S$  は、スミス図表上で、正規化リアクタンスが零、正規化抵抗が1より大きい半径上に目盛られる。

以上、スミス図表について述べたが、下記の例題が更に理解を助けるであろう。

- 問1 電圧最大点、最少点の(正規化)インピーダンスを求めよ。
- 問2 室外のアンテナのインピーダンスを室内で測るため、まずアンテナの位置で線路を短絡し、線路上の適当な位置で電圧最少点を確認した。その後、被測定アンテナを接続し、再度電圧最少点の位置を確認したところ 10cm だけ電源側に移動していた。周波数 1GHz、伝送線路の特性インピーダンスを 50  $\Omega$  として、アンテナのインピーダンスを求めよ。

- 問3 スミス図表はインピーダンス図表であるがアドミッタンス図表としても利用できる。その理由を説明せよ。
- 問4 図Q-1は2スタップチューナであり、スタップ長 $l_1, l_2$ を適当に選んで整合をとる。しかし、整合がとれない場合もある。それはどんな場合か。
- 問5 図Q-2は $\lambda/4$ 間隔で3スタップを並べたチューナである。負荷がどんな値であっても整合が取れることを示せ。その結果を、問4と比較せよ。

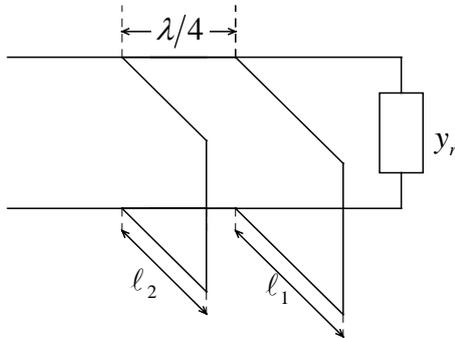


図 Q-1 2スタップチューナ

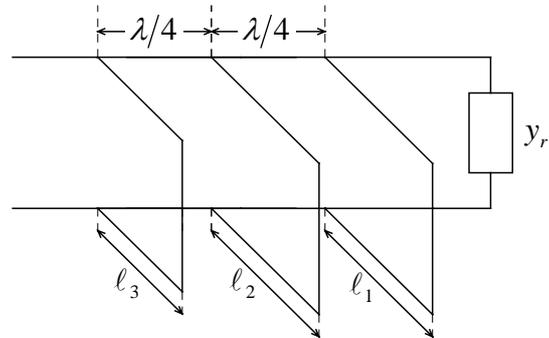


図 Q-2 3スタップチューナ

## 4. 散乱行列 [ 2 ]

### 4.1 複素振幅の導入

散乱行列は元来物理学の多体問題に関連して発展した手法である。それをマイクロ波回路の分野に導入したのは元東大教授黒川氏である。その際、重要な役割を担った概念が複素振幅であった。多体問題では粒子が衝突して跳ね返される。そのイメージをマイクロ波の透過、反射に当てはめるとき、電圧、電流では不便である。2乗しただけで電力になる量が欲しい。そのため、 $a, b$  とおいて、式(3a),(3b)を次のように変形する。

$$\frac{V(\zeta)}{\sqrt{Z_c}} = \frac{V_1}{\sqrt{Z_c}} e^{j\beta\zeta} + \frac{V_2}{\sqrt{Z_c}} e^{-j\beta\zeta} \quad (24a)$$

$$\sqrt{Z_c} I(\zeta) = \frac{V_1}{\sqrt{Z_c}} e^{j\beta\zeta} - \frac{V_2}{\sqrt{Z_c}} e^{-j\beta\zeta} \quad (24b)$$

ここで、

$$a(\zeta) = \frac{V_1}{\sqrt{Z_c}} e^{j\beta\zeta} \quad (25a)$$

$$b(\zeta) = \frac{V_2}{\sqrt{Z_c}} e^{-j\beta\zeta} \quad (25b)$$

とおいて、 $a(\zeta)$ を入射波の複素振幅、 $b(\zeta)$ を反射波の複素振幅と呼ぶことにする。実際、

$$|a(\zeta)|^2 = \frac{|V_1|^2}{Z_c} \quad (26a)$$

$$|b(\zeta)|^2 = \frac{|V_2|^2}{Z_c} \quad (26b)$$

となり、それぞれ入射電力、反射電力を表す。要するに、複素振幅を2乗するだけで電力が得られる点に理論上の便利さがあり、粒子散乱との類似性がより鮮明になる。

### 4.2 散乱行列の定義と簡単な例

図4は多端子対マイクロ波回路を示す。端子対*i*の入射複素振幅を $a_i$ 、反射複素振幅を $b_i$ とすれば、

回路の線形性により、次式が成り立つ。

$$[b] = [S][a] \quad (27)$$

ただし、 $[a]$ 、 $[b]$ はそれぞれ複素振幅  $a_i$ 、 $b_i$ を要素とする縦行列、 $[S]$ は散乱行列と呼ばれる正方行列であり、その要素を  $S_{ij}$ と表す。

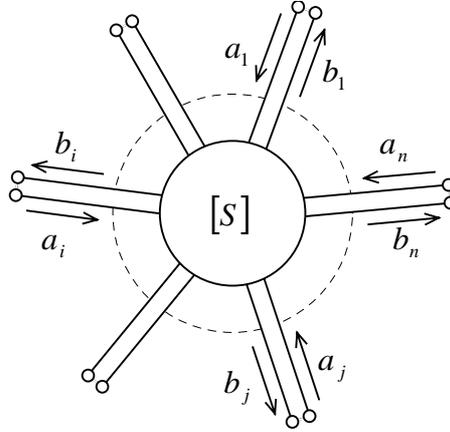


図4 多端子対回路

ここで、理解を助けるため、簡単な例をあげる。図5(a)は、均一な線路から長さ  $\ell$ の部分を取り出したものである。図から容易に分るように各複素振幅の間には次式が成り立つ。

$$b_1 = a_2 e^{-j\beta\ell} \quad (28a)$$

$$b_2 = a_1 e^{-j\beta\ell} \quad (28b)$$

従って、散乱行列はつぎのように求められる。

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

もう1つの例を図5(b)に示す。特性インピーダンスの異なる2本の線路を接続したものであり、接続点で電圧、電流の連続性を考慮すると、次式が成り立つ。

$$\sqrt{Z_1}(a_1 + b_1) = \sqrt{Z_2}(a_2 + b_2) \quad (30a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{Z_1}}(a_1 - b_1) = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}(a_2 - b_2) \quad (30b)$$

この式を解いて、散乱行列は以下のように求められる。

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} & \frac{2\sqrt{Z_2 Z_1}}{Z_2 + Z_1} \\ \frac{2\sqrt{Z_2 Z_1}}{Z_2 + Z_1} & -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

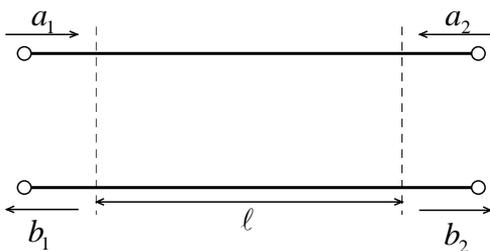


図5(a) 長さ  $\ell$ の線路区間

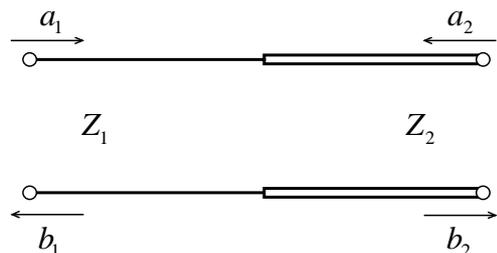


図5(b) 特性インピーダンスの異なる線路の接続

### 4.3 散乱行列の物理的意味

図4において端子対*i*以外の全ての端子対が整合状態にある場合を考える。このとき、式(27)は次のように書き換えられる。

$$b_j = S_{ji} a_i \quad \text{or} \quad S_{ji} = \frac{b_j}{a_i} \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

上式から、散乱行列の各要素に関する下記の物理的解釈が可能になる。

#### (1) 反射係数と透過係数

$$S_{ii} = \frac{b_i}{a_i} : \text{端子対}i\text{以外の全ての端子対を整合した場合の端子対}i\text{の反射係数} \quad (33a)$$

$$S_{ji} = \frac{b_j}{a_i} : \text{同様な条件下での端子対}i\text{から端子対}j\text{への透過係数} \quad (33b)$$

#### (2) 可逆性

式(33b)は端子対*i*と*j*を入れ換えても成り立つ。これを回路の可逆性という。

#### (3) ユニタリ性(エネルギー保存則)

無損失回路を仮定するとエネルギー保存則により次式が成り立つ。

$$\sum |a_i|^2 = \sum |b_i|^2 \quad \text{or} \quad [a^*][a] = [b^*][b] \quad (34)$$

ただし、 $[a^*]$ などは、縦行列 $[a]$ の転置共役行列である。式(34)を、散乱行列を用いて書換えると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} [a^*][a] - [b^*][b] &= [a^*][a] - [a^*][S^*][S][a] \\ &= [a^*]([U] - [S^*][S])[a] = [0] \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、 $[U]$   $[0]$  は、それぞれ単位行列、零行列である。式(35)から次式が得られる。

$$[S^*][S] = [U] \quad (36)$$

この性質を散乱行列のユニタリ(Unitary)性といい、エネルギー保存則の一表現として、回路特性を考察する上で有用な式である。なお、式(36)は次のようにも表現できる。

$$|S_{i1}|^2 + |S_{i2}|^2 + \dots + |S_{in}|^2 = 1 \quad (37a)$$

$$S_{i1}S_{j1}^* + S_{i2}S_{j2}^* + \dots + S_{in}S_{jn}^* = 0 \quad (37b)$$

### 4.4 散乱行列の簡単な応用例

#### (1) 2端子対回路

図6(a)は導波管2端子対回路の例である。金属板に穿たれた共振窓からなり、マイクロ波フィルタの構成要素として有用である。回路構造の対称性から、散乱行列も次式のように対称となる。

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (38)$$

散乱行列のユニタリ性により、上式の各要素間には次の関係式が成り立つ。

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \quad (39a)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{11}^* = 0 \quad (39b)$$

上の2式で、特に位相関係を表す式(39b)が興味深く、この式が成り立つためには $S_{11}S_{12}^*$ が純虚数であること、すなわち $S_{11}$ と $S_{12}^*$ の位相が90度異なることが必要である。以上のことを考慮すると、2端子対回路の散乱行列は次のように表される。

$$[S] = \begin{bmatrix} \alpha & \pm j\sqrt{1-\alpha^2} \\ \pm j\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha \end{bmatrix} \quad (40)$$

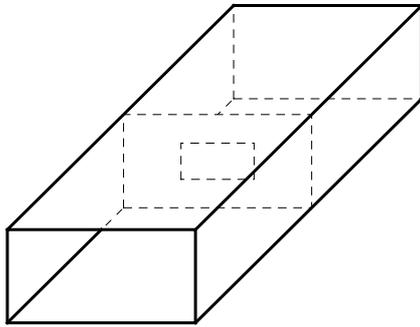


図 6(a) 2 端子対回路(導波管窓)

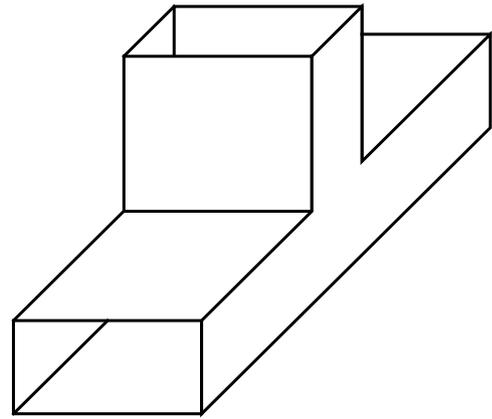


図 6(b) 3 端子対回路(導波管 E 面分岐)

## (2) 3 端子対回路

3 端子対回路の一例を図 6(b)に示す。これは、いわゆる導波管 E 面分岐回路であるが、この回路に代表される 3 端子対回路には、“完全整合”(全ての端子を同時に整合状態にすること)が不可能という“不思議な性質”がある。このことを、散乱行列を用いて証明する。

もし完全整合が可能であれば、式(33a)により、散乱行列の全ての対角要素は零となる。すなわち、3 端子対回路の散乱行列は次のように表されるはずである。

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

これより、ユニタリ性を用いて次式が導かれる。

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (42a)$$

$$S_{13}S_{23}^* = S_{12}S_{13}^* = S_{12}S_{23}^* = 0 \quad (42b)$$

式(42b)で  $S_{12} = 0$  と仮定すれば、 $S_{13} = S_{23} = 0$  でなければならない。しかし、これは式(42a)の第 3 式に矛盾する。よって、式(41)は成り立たず、3 端子対回路は完全整合できない。「3 端子対回路は完全整合できない」これは回路論における厳しい定理である。

## 5. 左手系伝送線路 [ 3 ][ 4 ]

第 2 章で述べたように、図 1 に示す分布定数線路の等価回路は図 2(a)のようになる。

L が直列、C が並列に分布しているが、C を直列、L を並列にしたらどうなるか(後で述べるように、この種の伝送線路を左手系線路と呼ぶ)。面白いが、構造が不連続になるので、實際上、無理がある。これが、従来の考え方であった。

ところが、最近、左手系線路あるいは左手系媒質に関する理論および応用の発表が続いている。著者はこの分野の専門家ではないが、伝送線路に関わる者の好奇心から、本分野を概観してみる。



図 7 左手系線路の等価回路表示

図1が左手系とすれば、等価回路は図7のようになるはずである。これから、直列インピーダンス $Z$ 、並列アドミッタンス $Y$ は次のように求められる。

$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (43a)$$

$$Y = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} \quad (43b)$$

ただし、簡単のため、分布抵抗 $R$ 、分布コンダクタンス $G$ は省略した。上式を式(1a),(1b)と比較すると $Z, Y$ の符号が異なる。その結果、上式を式(4a),(4b)に代入して伝搬定数 $\gamma$ 、特性インピーダンス $Z_c$ を求めると、それぞれ次のようになる。

$$\gamma = j\beta, \quad \text{ただし} \quad \beta = -\frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \quad (44a)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (44b)$$

の符号は負であり、式(5a)と異なるが、式(44b)の特性インピーダンスは形式的には前出の式(5b)と一致する。また、式(9)を用いて群速度を求めると、

$$v_g = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \omega^2 \sqrt{LC} \quad (45)$$

となり、通常の伝送線路と異なり [ 式(8),(9)参照 ] 位相速度と群速度は大きさも方向も異なる。この現象を、均質媒質中の平面波に対比させると、波数ベクトル(位相速度に対応)とポインティングベクトル(群速度に対応)の方向が逆向きであることを意味し、電界、磁界、波数ベクトルが左手系を形成する。この意味で、図7に示される線路を、通常の(右手系)線路に対し左手系線路と呼ぶ。

左手系線路は、単に数学的興味に留まらず、実用を目指した研究が鋭意進展している。今後に期待したい。

## 6. まとめ

伝送理論、スミス図表、散乱行列、左手系伝送線路と多岐に渉る話題を伝送方程式を基に解説した。デジタル技術が全盛の現在、それを支えるアナログ技術を、その基礎に立ち返っていま一度考察してみる必要を感じたからである。本講座が、その目的を達成したとすれば、望外の幸せである。

## 参考文献

- [ 1 ] 安達三郎、米山 務：「電波伝送工学」コロナ社、2008年  
第3章で伝送工学全般について解説している
- [ 2 ] 内藤喜之：[ 情報伝送入門 ] 昭晃堂 昭和51年  
版はやや古いが、スミスチャート、散乱行列、位相速度と群速度などについて詳述している。
- [ 3 ] 伊藤龍男：“CRLH理論の誕生”、Microwave Workshop Digest(MWE2007), 465-469.
- [ 4 ] 真田篤志：“右手/左手系複合メタマテリアルの基礎と回路設計”、Microwave Workshop Digest (MWE2007), 471-478.