右手／左手系複合メタマテリアルの基礎と回路設計

真田篤志

山口大学大学院理工学研究科

〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1

Tel: +81-836-85-9805, Fax: +81-836-85-9801, sanada@ieee.org

概要

右手／左手系複合(CRLH)メタマテリアルの設計に必要な媒質構成理論と回路設計の考え方を概説する．まず，左手系媒質の諸性質を示した後，媒質設計の基礎となる伝送線路理論と周期構造線路についてまとめる．次に CRLH 媒質の構成理論を示し，媒質中の波の分散特性および特性インピーダンスを理論的に示す．さらに，回路設計で実用上重要となるバランス型 CRLH 媒質の概念とその性質を示す．

1. はじめに

メタマテリアルは，波長に比べて十分小さい材料小片を単位粒子としてこれを並べて構成した構造体である．メタマテリアルは，その波長の波に対しては実効的に均質な媒質として扱うことができ，その実効的な電気的・磁気的性質は，単位粒子の種類，形状および配列により決まる．近年，自然にはない特異な性質を持つメタマテリアルの構成法が提案されてきている．

左手系媒質[1]は，誘電率と透磁率とが共に負となる媒質である．左手系媒質は，屈折率が負となり，エバネセント波が増大したりするなど特異な性質を持つことが知られている．現在の所，自然に存在する左手系媒質は見つかっていないが，メタマテリアルの概念を用いて構成可能であることが実証されている[2]．当初の左手系媒質はスプリットリング共振器(SRR)[3]とワイヤ共振器[4]とを組み合わせて構成されたが，動作帯域が狭く，損失も大きいものであった．その後，伝送線路理論に基づく非共振型の左手系媒質の構成法が提案され[5-7]，その広帯域動作かつ低損失動作のため工学的にも左手系媒質の電磁波応用[8-11]が期待されるようになってきた．

右手／左手系複合 (composite right/left-handed; CRLH) 媒質の構成の概念[12-15]は，非共振型の左手系媒質の構成法の最も基礎的なものであり，CRLH 媒質モデルを用いると，左手系および右手系の波の伝搬，バンドギャップの存在など，現実的な左手系媒質の性質を非常に良く表すことができる．しかし，CRLH 媒質の媒質設計法に関する基礎的な文献はまだ少ないようである．

本稿では，CRLH 媒質の理論とその性質について概説する．まず，左手系媒質の一般的な性質について述べた後，CRLH メタマテリアル媒質構成理論の基となる伝送線路理論および周期構造線路理論について簡単にまとめる．次に CRLH 媒質モデルを，右手系線路モデルおよび理想左手系線路モデルと比較しながら示し，CRLH 媒質中を伝搬する波の分散関係およびブロッホインピーダンスを理論的に求め，基本伝送特性を明らかにする．また媒質設計に重要なバランス型 CRLH 媒質の概念を示し，これが回路設計に極めて有利となることを示す．

2. 左手系媒質

一般に，媒質を誘電率および透磁率の符号により分類すると図 1 の様になる．左手系媒質は誘電率εおよび透磁率μが同時に負となる媒質[1]で，図では第 3 象限に配される．この媒質中を伝搬する平面波の電界 $\boldsymbol{E}$, 磁界 $\boldsymbol{H}$ および波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の関係は, Maxwell 方程式[16,17]に従い,

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2}$$

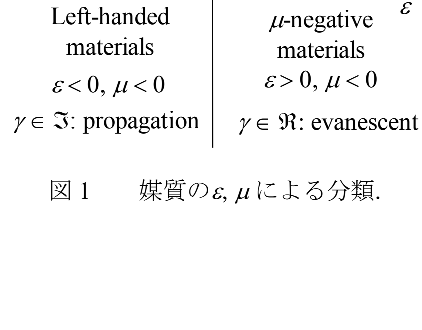


図 1　媒質のε, μによる分類.

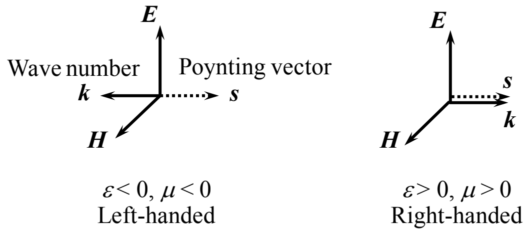


図 2　媒質中の $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{k}$ の関係.

で表される．ここで ω は角周波数である. $\varepsilon < 0$ および $\mu < 0$ である左手系媒質中で $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{k}$ は図 2 の様に左手系をなす.

この場合波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ はポインティングベクトル $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ と反平行となる．このことは, 位相とエネルギーの伝搬方向が互いに逆となるバックワード波が伝搬することを示している.

左手系媒質の特徴を示しておこう．まず, 左手系媒質の屈折率 n は, 因果律から負の値をとらなければならない[1].

$$n=-\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{3}$$

また, 左手系媒質は必然的に分散性を持たなければならない. 左手系媒質中の電気エネルギーおよび磁気エネルギーはそれぞれ,

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{4}$$

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}|\boldsymbol{H}|^2 \tag{5}$$

で与えられるが, 両者は共に正であることから式(4)および(5)式の右辺の係数が正でなければならない. したがって, 左手系媒質中では, ε および μ は周波数の関数とならなければならない[1].

さらに, 左手系媒質中ではエバネセント波は増大する. 左手系媒質中の波の波数 $\boldsymbol{k}$ を, 伝搬に垂直な横方向の波数 $\boldsymbol{k}_\perp$ で表すと,

$$|\boldsymbol{k}|=j\sqrt{|\boldsymbol{k}_\perp|^2-\varepsilon\mu|\boldsymbol{k}_0|^2} \tag{6}$$

となる．ここで $\boldsymbol{k}_0$ は真空中の波数である. $|\boldsymbol{k}_\perp|^2>\varepsilon\mu|\boldsymbol{k}_0|^2$ なるエバネセント波に対して, 伝搬方向を z 軸にとれば伝搬因子は $\exp(-jkz)$ = $\exp(+\alpha z)$ となるため, エバネセント波は伝搬に伴いその大きさが指数関数的に増大する[18].

3.　伝送線路理論と周期構造線路

3.1　伝送線路理論

図 3(a)の様な一様な分布定数線路中の微小区間 Δz を, 図 3(b)の様な単位長さ当たりの直列インピーダンス Z' (Ω/m)および単位長さ当たりの並列アドミタンス Y' (S/m) で表す．図 3 は伝送線路モデルと呼ばれる[19,20].

いま, $\Delta z\to 0$ の極限を考えると, 線路を伝搬する

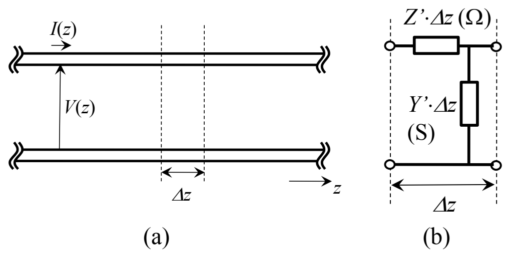


図 3　伝送線路モデル．(a) 一様分布定数線路. (b) 微小区間回路モデル ($\Delta z\to 0$).

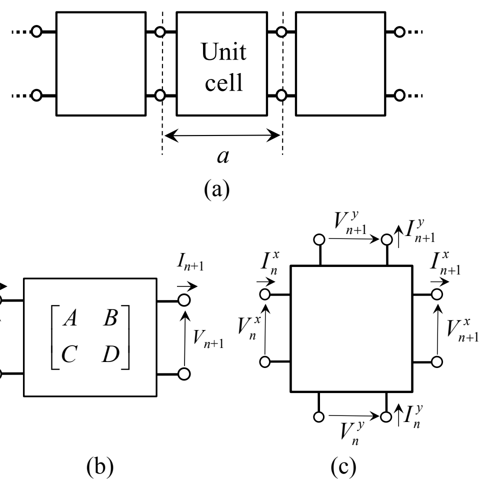


図 4　周期構造線路. (a) 1 次元周期構造線路. (b) 単位セル(1 次元).　(c) 単位セル(2 次元).

角振動数 ω の波動の伝搬定数 γ および特性インピーダンス Z_0 は,

$$\gamma=\sqrt{Z'Y'} \tag{7}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \tag{8}$$

で表される.

式(7)および(8)を, 誘電率 ε, 透磁率 μ なる均質媒質中の波動方程式と比較すれば,

$$\varepsilon=\frac{1}{j\omega}\frac{\gamma}{Z_0}=\frac{Y'}{j\omega} \tag{9}$$

$$\mu=\frac{1}{j\omega}\gamma Z_0=\frac{Z'}{j\omega} \tag{10}$$

と対応づけられる.

3.2　周期構造線路

周期構造中を伝搬する波は, 固体結晶中の弾性波からの類推によりブロッホ波と呼ばれる. ブロッホ波の分散特性およびインピーダンスは周期性の影響を強く受ける[20].

いま, 図 4(a)の周期構造線路に対する単位セルを, 図 4(b)の様に表す. 各端子における電圧および電流の関係を F 行列で表すと次の様になる.

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

各端子における電圧波および電流波は，ブロッホ・フロケの定理[17,19,21]により

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = e^{\gamma a} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

と書ける．この関係を式(11)に与えることで，

$$\begin{bmatrix} A - e^{\gamma a} & B \\ C & D - e^{\gamma a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

を得る．上式の V_{n+1}, I_{n+1} が自明でない解を持つには，左辺の行列の行列式が零でなければならない．これに，回路が可逆である場合には $AD-BC = 1$ であることを考慮すると，

$$\cosh \gamma a = \frac{A+D}{2} \tag{14}$$

を得る．これが分散関係を与える．

ブロッホ波に対するインピーダンスは，端子面における電圧と電流の比をとると次式で与えられる．

$$Z_{\mathrm{B}}^{\pm} = \frac{-2B}{A - D \mp \sqrt{(A+D)^2 - 4}} \tag{15}$$

これはブロッホインピーダンスと呼ばれる[20]. Z_{B} の複号は z 軸の正または負に伝搬する波に対するものである．Z_{B} は周期的に変化し，一意的には決まらないことにも注意が必要である．

なお，単位セルが対称の場合，$A = D$ となるため分散関係式およびブロッホインピーダンスは

$$\cosh \gamma a = A \tag{16}$$

$$Z_{\mathrm{B}}^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{B}{C}} \tag{17}$$

と簡略化される．

3.3　多次元周期構造線路

2 次元以上の周期構造に対しては一般的には伝送行列を書き表さないが，例えば，2 次元周期構造に対して，図 3(c)の様に xy 面上の回路の各端子上で電圧・電流を定義し，これらの関係を

$$\begin{bmatrix} V_n^x \\ I_n^x \\ V_n^y \\ I_n^y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} V_{n+1}^x \\ I_{n+1}^x \\ V_{n+1}^y \\ I_{n+1}^y \end{bmatrix} \tag{18}$$

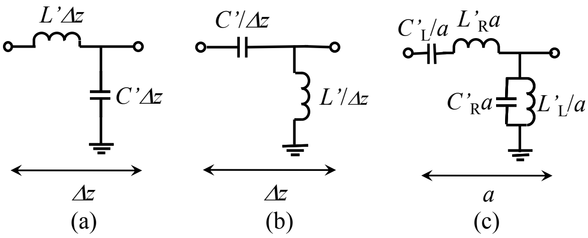


図 5　単位セルモデル. (a) 右手系線路. (b) 理想左手系線路. (c) 右手／左手系複合線路.

と書き表すと，1 次元周期構造と同様な手法により分散関係を，

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \mathrm{diag}[\, e^{jk_x a}, e^{jk_x a}, e^{jk_y b}, e^{jk_y b}\,]\right) = 0 \tag{19}$$

により求めることができる．ここで k_x および k_y はそれぞれ x 方向および y 方向の波数，a および b は x 方向および y 方向の周期である．

3 次元線路に対しても同様にして分散関係を求めることができる．

4.　左手系媒質の伝送線路モデル

4.1　理想左手系線路

まず，通常の右手系の分布定数線路の分散関係と特性インピーダンスをまとめておく．図 5(a)は，右手系の分布定数線路モデルである[19,20]．ここで簡単のため線路は無損失であると仮定している．この線路の伝搬定数 $\beta = -j\gamma$ および特性インピーダンスは，式(7)および(8)において $Z' = j\omega L'$ および $Y' = j\omega C'$ とすることで，

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} \tag{20}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{21}$$

と得られる．ここで L' および C' はそれぞれ単位長さ当たりのインダクタンスおよびキャパシタンスで，単位は H/m および F/m である．なお，位相速度および群速度は，

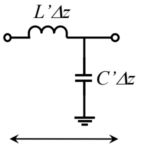
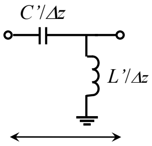
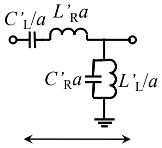
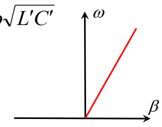
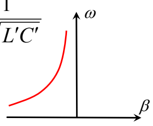
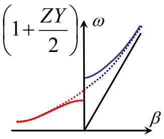
$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{22}$$

$$v_{\mathrm{g}} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{23}$$

となり，符号および大きさは等しい．

一方，図 4(a)の直列インダクタンスと並列キャパシタンスとを入れ替えた図 4(b)の様な双対回路を考える[22]．この回路は理想左手系線路と呼ばれる．この回路は，フィルタ理論において高域通過特性を持つ回路[23]としても古くから知られているものであることは興味深い．この回路を伝送線路として考えた場合の分散関係およびインピーダンス

表 1　伝送線路モデル.

RH	Ideal LH	CRLH(Periodic)
		
$\Delta z \to 0$	$\Delta z \to 0$	a
$\beta = \omega\sqrt{L'C'}$ 	$\beta = -\dfrac{1}{\omega\sqrt{L'C'}}$ 	$\beta = \dfrac{1}{a}\cos^{-1}\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right)$ 
$v_p = 1/\sqrt{L'C'}$	$v_p = -\omega^2\sqrt{L'C'}$	LH : $v_p \cdot v_g < 0$
$v_g = 1/\sqrt{L'C'}$	$v_g = \omega^2\sqrt{L'C'}$	RH : $v_p \cdot v_g > 0$
$Z_0 = \sqrt{\dfrac{L'}{C'}}$	$Z_0 = \sqrt{\dfrac{L'}{C'}}$	$Z_B = Z_L\sqrt{\dfrac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{se}^2}-1}{\dfrac{\omega^2}{\omega_{sh}^2}-1} - \dfrac{\omega_L^2}{4\omega^2}\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_{se}^2}-1\right)^2}$

は，式(7)および(8)において $Z' = 1/(j\omega C')$および $Y' = 1/(j\omega L')$とし，エネルギーが z 軸の正の方向に伝搬する波の因果律を考慮すると，

$$\beta = -\frac{1}{\omega\sqrt{L'C'}} \tag{24}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{25}$$

と得られる．ここで C'および L'の単位はそれぞれ F·m および H·m でなければならないことに注意が必要である．

理想左手系線路の特性インピーダンスは，式(25)の様に L' と C' の比の平方根で決まる．これは式(21)の右手系線路の場合と同じである．このことから，双対な右手系線路と左手系線路同士は自動的に整合することになる．

式(24)の伝搬定数βから，位相速度および群速度はそれぞれ，

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = -\omega^2\sqrt{L'C'} \tag{26}$$

$$v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \omega^2\sqrt{L'C'} \tag{27}$$

と求められる．両者の符号は異なりこの線路を伝搬する波はバックワード波であることがわかる．

図 5(b)の理想左手系線路モデルは非常に明解で左手系媒質の動作を直感的に説明することができるが，現実の物理現象を良く表さない側面もある．例えば，各素子値 $C'/\Delta z$ と $L'/\Delta z$ を有限値に保ったまま$\Delta z \to 0$ とすることは現実的ではない．また，式(27)によれば群速度 v_g は角周波数ωが大きくなるにつれていくらでも増加し，やがて光速を越えてしまう．この矛盾は，単位セル中のホスト媒質の寄生の右手系の影響，すなわち単位長さ当たりの直列インダクタンスと単位長さ当たりの並列容量を無視したために生じたものである．現実の左手系媒質を取り扱うにはこれらを考慮しなければならない．このため後述の CRLH 線路が提案されている[12-15].

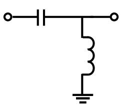
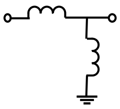
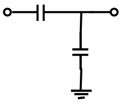
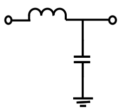
右手系線路と理想左手系線路，さらに次節で述べる CRLH 線路の分散特性と特性インピーダンスをまとめて表 1 に示しておく．

4.2 右手／左手系複合(CRLH)線路

右手／左手系複合(composite right/left-handed; CRLH)線路モデルを図 5(c)に示す．ここでは，左手系の直列の容量 C'_L/a および並列のインダクタンス L'_L/a に加えて，右手系の寄生の直列インダクタンス $L'_R a$ および並列キャパシタンス $C'_R a$ が導入されている．CRLH 線路モデルは，物理現象を良く表す最も一般的な左手系線路モデルのうちの一つである．

CRLH 線路中の波の伝搬特性を直感的に捉えるために，以下の考察をしておこう．CRLH 線路モデルにおいて，直列ブランチは周波数が低い場合には容量的で，周波数が高い場合には誘導的となる．逆に，並列ブランチは周波数が低い場合には誘導的で，周波数が高い場合には容量的になる．従って，低周波域に左手系伝搬帯域が，また高周波域に右手系伝送帯域が存在することになる．また，左手系伝送帯域と右手系伝送帯域との間で直列および並列ブランチが共に誘導的あるいは共に容量的となる場合がある．この帯域ではバンドギャップが生じる．なお，単位セルの周期 a が有限な場合には，左手系伝送帯域の低域側に，また右手系伝送帯域の高域側にそれぞれカットオフ周波数を持つ．これは図 5(c)の回路がバンドパス特性を持つことによるものである．この様な CRLH 線路の伝搬域と周波数の関係を表 2 にまとめておく．

表 2　CRLH 媒質の動作.

Evanescent	Propagation	Evanescent	Propagation	Evanescent
High-pass cut-off	LH	Bandgap	RH	Low-pass cut-off
Bragg (LH)	 $\varepsilon<0,\ \mu<0$	 $\varepsilon<0,\ \mu>0$ or  $\varepsilon>0,\ \mu<0$	 $\varepsilon>0,\ \mu>0$	Bragg (RH)

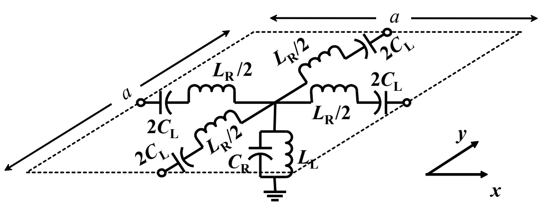


図 6　2 次元 CRLH 媒質の単位セルモデル.

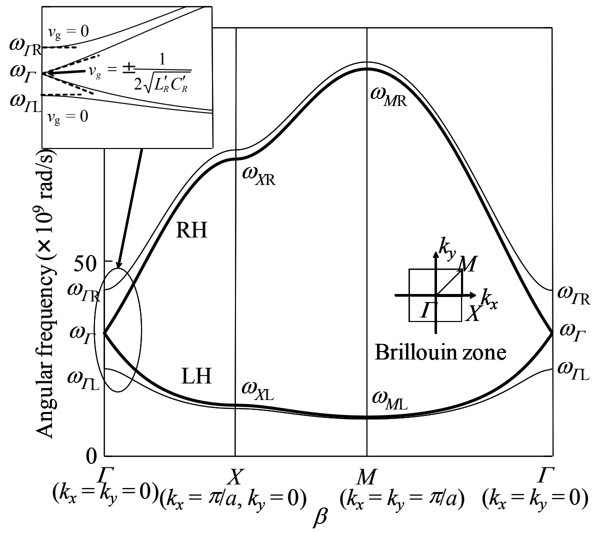


図 7　2 次元 CRLH 媒質の分散特性. 太線はバランス型 ($\omega_{se} = \omega_{sh}$) $C_L = C_R = 1.0$ pF, $L_L = L_R = 1.0$ nH; 細線はアンバランス型 ($\omega_{se} \neq \omega_{sh}$) $C_L = 2.0$ pF, $C_R = 1.0$ pF, $L_L = L_R = 1.0$ nH.

5. CRLH メタマテリアルの基本伝送特性

ここでは 2 次元の CRLH 線路モデルを取り上げて, CRLH メタマテリアル中の波動の伝搬特性を示そう.

まず, 前節の CRLH 線路モデルを図 6 の様に 2 次元に拡張する. 本モデルは x 方向に伝搬する CRLH 線路モデルにそれに直交する y 方向のブランチを付加したもので, xy 面内に伝搬する 2 次元の波の伝搬を表すことができる. ここで簡単のため, 単位セルは x, y 方向共に周期が a で対称とし, 各ブランチの素子値を,

$$C_L = C_L'/a, \quad L_L = L_L'/a \tag{28}$$

$$C_R = C_R'a, \quad L_R = L_R'a \tag{29}$$

とする.

1 次元の線路の解析と同様に, 各ノードにおける電圧および各ノードを x あるいは y の正の方向に流れる電流を定義する. 式(19)より分散関係式は次式の様に求められる[12].

$$\frac{\left(e^{-jk_xa}-1\right)^2}{e^{-jk_xa}} + \frac{\left(e^{-jk_ya}-1\right)^2}{e^{-jk_ya}} - 2Z(\omega)Y(\omega) = 0 \tag{30}$$

ここで $Z(\omega)$および $Y(\omega)$はそれぞれ直列ブランチのインピーダンスおよび並列ブランチのアドミタンスであり,

$$Z(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega C_L} + j\omega L_R\right) \tag{31}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega L_L} + j\omega C_R \tag{32}$$

となる. なお伝搬定数βの大きさは次式で与えられる.

$$\beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{33}$$

式(30)より群速度を求めると,

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = -\frac{a\sin\beta a}{\dfrac{1}{\omega^3 L_{\mathrm{L}} C_{\mathrm{L}}} - \omega L_{\mathrm{R}} C_{\mathrm{R}}} \tag{34}$$

となる. これより,

$$v_{\mathrm{g}} < \frac{1}{\sqrt{L'_{\mathrm{R}} C'_{\mathrm{R}}}} < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 \tag{35}$$

を示すことができる. ここで c_0 は光速である. すなわち CRLH 媒質中では群速度は光速を超えない.

式(30)で与えられる典型的な分散特性を図 7 に示す. ここで横軸のΓ, X, Mはブリルアンゾーン[21]上の高対称点であり, Γ点は(k_x, k_y)の波数空間上の点(0, 0)を, X 点は点(π/a, 0)を, また M 点は点(π/a, π/a)を表している. すなわちΓ-X の領域では, $k_y = 0$ としたまま k_xが 0 からπ/aと変化する場合を, X-Mの領域では$k_x = \pi/a$としたまま k_yが 0 からπ/aに変化する場合を, またM-Γの領域では $k_x = k_y$としてπ/aから0に変化する場合の波の伝搬をそれぞれ表している. Γ-Xの領域では, 単位セルの辺に平行な方向に伝搬する波の分散関係を, M-Γの領域では単位セルの対角方向に伝搬する波の分散関係を表すことになる. なお, Γ-Xの軸とM-Γの軸とでは波数の大小関係が逆となっていることに注意が必要である.

図中の太線は $C_{\mathrm{L}} = C_{\mathrm{R}} = 1.0$ pF, $L_{\mathrm{L}} = L_{\mathrm{R}} = 1.0$ nHとした場合で, 細線は $C_{\mathrm{L}} = 2.0$ pF, $C_{\mathrm{R}} = 1.0$ pF, $L_{\mathrm{L}} = L_{\mathrm{R}} = 1.0$ nHとした場合である. これらの違いの詳細については後述するが, 典型的な2種類の分散特性を示している. 分散特性の傾きは群速度を, 原点からの直線の傾きは位相速度を表す[16]ため, 図よりΓ-X 領域において角周波数が$\omega_{X\mathrm{L}}$から$\omega_{\Gamma\mathrm{L}}$の範囲では$\Gamma$, X点上を除いて群速度が負でかつ位相速度は正と異符号となっていることがわかる. したがって図の角周波数$\omega_{X\mathrm{L}}$から$\omega_{\Gamma\mathrm{L}}$の範囲ではバックワード波が伝搬することになる. なお M-Γ領域においても, 軸の正負がΓ-X 領域と比べて反転していることを考慮すればバックワード波が伝搬することがわかる. 逆に, 角周波数が$\omega_{X\mathrm{R}}$から$\omega_{\Gamma\mathrm{R}}$の範囲では群速度と位相速度の符号が等しく, 右手系の波の伝搬である. 一般には細線の場合の様に左手系伝搬帯域の上限角周波数$\omega_{\Gamma\mathrm{L}}$と右手系伝搬帯域の下限角周波数$\omega_{\Gamma\mathrm{R}}$の間にはバンドギャップが存在する.

図中の各点の周波数を求めておこう. これらは, 式(30)の分散関係式にΓ, XおよびM点の波数(k_x, k_y)を代入することで次式のように求められる[13].

$$\omega_{\Gamma\mathrm{L}} = \min(\omega_{\mathrm{se}}, \omega_{\mathrm{sh}}) \tag{36}$$

$$\omega_{\Gamma\mathrm{R}} = \max(\omega_{\mathrm{se}}, \omega_{\mathrm{sh}}) \tag{37}$$

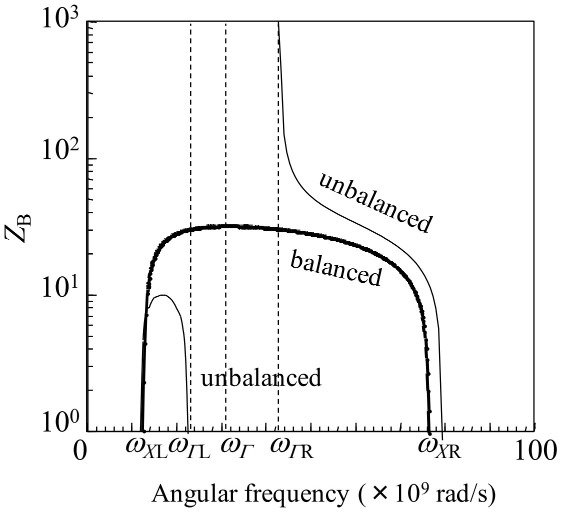


図 8 ブロッホインピーダンス. 太線はバランス型の場合($\omega_{\mathrm{se}} = \omega_{\mathrm{sh}}$)で $C_{\mathrm{L}} = C_{\mathrm{R}} = 1.0$ pF, $L_{\mathrm{L}} = L_{\mathrm{R}} = 1.0$ nH; 細線はアンバランス型 ($\omega_{\mathrm{se}} \neq \omega_{\mathrm{sh}}$) $C_{\mathrm{L}} = 2.0$ pF, $C_{\mathrm{R}} = 1.0$ pF, $L_{\mathrm{L}} = L_{\mathrm{R}} = 1.0$ nH.

$$\left.\begin{matrix}\omega_{X\mathrm{L}}^2\\ \omega_{X\mathrm{R}}^2\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_{\mathrm{se}}^2 + \omega_{\mathrm{sh}}^2}{2} + 2\omega_{\mathrm{R}}^2 \mp \left\{\left(\frac{\omega_{\mathrm{se}}^2 + \omega_{\mathrm{sh}}^2}{2} + 2\omega_{\mathrm{R}}^2\right)^2 - \omega_{\mathrm{se}}^2\omega_{\mathrm{sh}}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_{M\mathrm{L}}^2\\ \omega_{M\mathrm{R}}^2\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_{\mathrm{se}}^2 + \omega_{\mathrm{sh}}^2}{2} + 4\omega_{\mathrm{R}}^2 \mp \left\{\left(\frac{\omega_{\mathrm{se}}^2 + \omega_{\mathrm{sh}}^2}{2} + 4\omega_{\mathrm{R}}^2\right)^2 - \omega_{\mathrm{se}}^2\omega_{\mathrm{sh}}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{39}$$

ここでω_{L}, ω_{R}, ω_{se} およびω_{sh}は

$$\omega_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{L}} C_{\mathrm{L}}}}, \quad \omega_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{R}} C_{\mathrm{R}}}}$$

$$\omega_{\mathrm{se}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{R}} C_{\mathrm{L}}}}, \quad \omega_{\mathrm{sh}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{L}} C_{\mathrm{R}}}}$$

である.

ω_{se}およびω_{sh}は物理的には図 6 の CRLH 単位セルの直列ブランチの共振角周波数と並列ブランチの共振角周波数を表す. 式(36)および(37)によるとバンドギャップは CRLH 単位セルの直列ブランチと並列ブランチの共振角周波数により決まることは興味深い. このω_{se}とω_{sh}の大小関係によりこのバンドギャップが誘導的であるか容量的であるかが決まる.

Γ点に近い領域では$\beta \sim 0$であるので波長は単位セル周期に比べて十分長く, 均質媒質近似が成り立つ. このため合理的に実効屈折率を定義することができる. 左手系および右手系伝送帯域において実効屈折率を求めるとそれぞれ次式の様になる.

$$n=\frac{c_0\beta}{\omega}=\begin{cases}-\dfrac{c_0}{\omega a}\cos^{-1}\left\{1-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\omega_L^2}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega_R^2}-\left(\dfrac{\omega_{sh}^2}{\omega_R^2}+\dfrac{\omega_{se}^2}{\omega_R^2}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \text{LH (where } \omega\approx\omega_{\Gamma 1}) \\ \dfrac{c_0}{\omega a}\cos^{-1}\left\{1-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\omega_L^2}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega_R^2}+\left(\dfrac{\omega_{sh}^2}{\omega_R^2}+\dfrac{\omega_{se}^2}{\omega_R^2}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \text{RH (where } \omega\approx\omega_{\Gamma 2})\end{cases} \tag{40}$$

最後にブロッホインピーダンスを求めておこう．簡単のため，図 6 の単位セルに対して x 方向に伝搬する波を考える．このときブロッホインピーダンスは 1 次元線路を伝搬する波のそれと等しく，式(17)より，

$$Z_B=Z_L\sqrt{\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{se}^2}-1}{\dfrac{\omega^2}{\omega_{sh}^2}-1}-\frac{\omega_L^2}{4\omega^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_{se}^2}-1\right)^2} \tag{41}$$

と得られる[13]．ここでZ_Lは，

$$Z_L=\sqrt{\frac{L_L}{C_L}} \tag{42}$$

である．

式(41)のブロッホインピーダンスを図示すると図 8 の様になる．ここでは，典型的な素子値として $C_L = C_R = 1.0$ pF, $L_L = L_R = 1.0$ nH の場合(太線)と, $C_L = 2.0$ pF, $C_R = 1.0$ pF, $L_L = L_R = 1.0$ nH の場合(細線)の 2 種類を示した．図の様に，ブロッホインピーダンスはパラメータの違いにもよるが零から無限大まで変化する．しかし後述するように帯域内で緩やかな変化となるように設計することも可能である．

6. バランス型 CRLH メタマテリアル

いま特別な場合として，図 6 の単位セルの直列ブランチの共振回路と並列ブランチの共振回路の共振角周波数が等しい場合，すなわち，

$$\omega_{se}=\omega_{sh} \tag{43}$$

なる場合を考える．この条件は CRLH メタマテリアルのバランス条件[12]と呼ばれる．バランス条件下で媒質中の波の伝搬特性は特徴的となり応用上も重要である．この時の特に重要な波の伝搬の様子をまとめておこう．

バンドギャップの消失

式(36)および(37)より，ω_{se} およびω_{sh} は，バンドギャップの上限および下限の角周波数となる．CRLH 媒質がバランス条件を満足しこれらが一致する場合，$\omega_{se} = \omega_{sh} \equiv \omega_\Gamma$ においてバンドギャップは閉じて消失することになる．このとき，左手系伝送帯域と右手系伝送帯域はω_Γにおいてシームレスに繋がることになる．このことは漏洩波アンテナなど，バックワード波とフォワード波の双方を利用する場合の媒質設計には特に重要である．

Γ点におけるエネルギーの伝送

CRLH 媒質がバランス条件を満足する場合のΓ点におけるエネルギーの伝送を考えよう．いま簡単のため x 方向に伝搬する波を考える．式(34)において$\omega\to\omega_\Gamma$ $(\beta\to 0)$なる極限を考えると分母と分子共に零となり不定となるが，ベルヌイ-ロピタルの定理を使うと，

$$\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\overset{\left(\substack{\omega\to\omega_\Gamma\\ \beta\to 0}\right)}{=}-\frac{a^2(\cos\beta a)\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^{-1}}{-\dfrac{3}{\omega^4 L_L C_L}-L_R C_R}$$
$$=\frac{a^2\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^{-1}}{\dfrac{3L_L C_L L_R C_R}{L_L C_L}+L_R C_R}=\frac{a^2}{4L_R C_R}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^{-1} \tag{44}$$

なる関係を得る[12]．これを$(\partial\omega/\partial\beta)$について整理することで,

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right|_{\omega=\omega_\Gamma}=\sqrt{\frac{a^2}{4L_R C_R}}=\frac{1}{2\sqrt{L_R' C_R'}} \tag{45}$$

を得る．

図 7 の太線はバランス型の場合の分散特性を示したものである．Γ点においてバンドギャップが消失しているが，Γ点における分散曲線の傾きすなわち群速度に注目すると，傾きは非零の有限な値となりエネルギーの伝送が可能であることがわかる．これに対して，細線のアンバランス型の場合にはΓ点において傾きが零となりエネルギーの伝送はない．

なお，バランス型 CRLH 媒質のホスト媒質が真空であるとすると式(45)は $1/(2\sqrt{L_R' C_R'})=1/(2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})=c_0/2$ と光速の丁度半分となることは興味深い[12]．

Γ点におけるブロッホインピーダンスの連続性

式(41)によるとブロッホインピーダンス Z_B は $\omega\to\omega_{se}$ で零に，$\omega\to\omega_{se}$ で無限大にそれぞれ漸近する．それではバランス型の場合にはどうであろうか．式(41)で$\omega\to\omega_{se}=\omega_{sh}$とすれば Z_B は,

$$Z_B=Z_L \tag{46}$$

となり非零の有限の値をとることになる[13]．

図 8 の太線はバランス型の場合の Z_B の周波数変化である．細線のアンバランス型の場合にはバ

ンドギャップの上限および下限周波数においてインピーダンスが零と無限大にそれぞれ変化し，その前後の周波数においてZ_Bが大きく変化している．これに対して，バランス型の場合には，バランス周波数においてZ_BはZ_Lの値となり，その前後での変化も小さくなっていることがわかる．このことは，バランス周波数付近で左手系伝送帯域と右手系伝送帯域の双方に整合が可能であることを示しており，応用上非常に重要である．

6. まとめ

非共振型の左手系媒質として最も一般的な，CRLH 媒質の概念と性質について示した．多くの CRLH メタマテリアル設計においてバランス条件を満足させる設計は必須となるであろう．本稿が CRLH 媒質による新たなデバイス設計概念構築の一助となれば幸いである．

References

[1] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ" Soviet Physics Uspekhi, vol. 10, No. 4, pp.509-514, Jan-Feb., 1968.
[2] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity," Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 18, pp.4184-4187, May 2000.
[3] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robins, and W. J. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 47, no. 11, pp. 2075-2084, 1999.
[4] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Low frequency plasomosin thin-wire structures," J. Phys.: Condens. Matter, Vol. 10, pp. 4785-4809, March 1998.
[5] C. Caloz, and T. Itoh, "Application of the transmission line theory of left-handed (LH) materials to the realization of a microstrip LH transmission line", IEEE-APS Int'l Symp. Digest, vol. 2, pp. 412-415, June 2002.
[6] A. A. Oliner, "A periodic-structure negative-refractive-index medium without resonant elements," IEEE-APS/URSI Int'l Symp. Digest, p. 41, June 2002.
[7] A. K. Iyer and G. V. Eleftheriades , "Negative refractive index media using periodically *L-C* loaded Transmission lines," IEEE-MTT Int'l Symp. Digest, pp 1067-1070, June 2002.
[8] C. Caloz and T. Itoh, "Novel microwave devices and structures based on the transmission line approach of meta-materials", IEEE-MTT Int'l Symp. Digest, pp.195-198, June 2003.
[9] A. Grbic and G. V. Eleftheriades, "Experimental verification of backward-wave radiation from a negative refractive index material," Journal of Applied Physics, Vol. 92, No. 10, pp. 5930-5935, Nov. 2002.
[10] C. Caloz, A. Sanada, L. Liu and T. Itoh, "A broadband left-handed (LH) coupled-line backward coupler with arbitrary coupling level," IEEE-MTT Int'l Symp. Digest, pp.317-320, June 2003.
[11] A. Sanada, C. Caloz and T. Itoh, "Novel zeroth-order resonance in composite right/left-handed transmission line resonator," 2003 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings, pp.1588-1591, Nov. 2003.
[12] A. Sanada, C. Caloz, and T. Itoh, "Characteristics of the Composite Right/Left-Handed Transmission Lines," IEEE Microwave and Wireless Components Letters, Vol. 14, No.2, pp. 68-70, February 2004
[13] A. Sanada, C. Caloz and T. Itoh, ``Planar distributed structures with negative refractive index," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol. 52, No. 4, pp. 1252-1263, April 2004.
[14] A. Lai, C. Caloz and T. Itoh, "Composite right/left-handed transmission line metamaterials," IEEE Microwave Magazine, vol. 5, no. 3, pp. 34-50, September 2004
[15] C. Caloz and T. Itoh, "Electromagnetic metamaterials," John Wiley & Sons, New York, 2005.
[16] J. D. Jackson, "Classical electrodynamics, third edition," John Wiley & Sons, New York, 1999.
[17] R. E. Collin, "Field theory of guided waves, second ed.," IEEE Press, 1991.
[18] J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens," Phys. Rev. Lett., Vol. 85, no. 18, pp. 3966-3969, 30 October 2000.
[19] R. E. Collin, "Foundations for microwave engineering, second ed.," McGraw Hill, 1992.
[20] D. M. Pozar, "Microwave engineering, second ed.," John Wiley & Sons, New York, 1998
[21] C. Kittel, "Introduction to Solid State Physics, 7th ed.," John Wiley & Sons, 1995..
[22] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. Van Duzer, "Fields and waves in communication electronics second edition," John Wiley & Sons, pp. 257-258, 1984.
[23] G. L. Matthaei, L. Young, and E. M. T. Jones, "Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures," Artech House, 1980.